

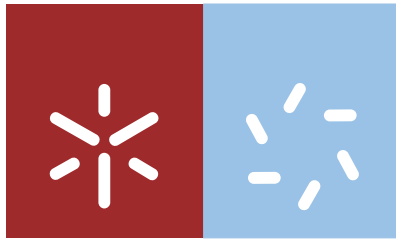
Universidade do Minho
Escola de Ciências

Rita Henriques Flores

UMinho | 2012

Rita Henriques Flores

Medida de Complexidade em Autómatos Celulares no Plano



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Rita Henriques Flores

Medida de Complexidade em Autómatos Celulares no Plano

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor Ricardo Severino

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA DISSERTAÇÃO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, ____/____/____

Assinatura: _____

Mestrado: em Ciências – Formação Contínua de Professores

Nome do aluno: Rita Henriques Flores

Tese: Medida de Complexidade em Autómatos Celulares no Plano

Resumo

Neste trabalho são estudados três tipos de autómatos celulares: os Autómatos Celulares Elementares, ou seja, os autómatos mais simples na linha, e dois tipos de autómatos no plano, os Autómatos Celulares Periféricos e uma família de Autómatos Celulares com Limiar, com uma estrutura de vizinhanças mais complicada do que a habitual. A partir de uma medida de complexidade utilizada por J. Sales, M. Martins e D. Stariolo⁽¹⁾ para estudar modelos de regulação genética, propomos uma medida de complexidade para os autómatos. Inicialmente, mostramos que esta medida, aplicada aos Autómatos Celulares Elementares, consegue distinguir as diferentes classes de Wolfram. Por fim, usamos esta medida de complexidade para estudar os Autómatos Celulares Periféricos no plano cujas dinâmicas mais significativas têm como estado assintótico uma configuração homogénea ou o ciclo composto por ambas as configurações homogéneas. Os resultados obtidos permitem confirmar, desta vez a partir dos valores de uma medida, aquilo que tinha sido anteriormente observado por J.A. Freitas⁽²⁾: que estes autómatos têm, de facto, bacias de atração homogéneas com diferentes níveis de complexidade.

(1) J.A. de Sales, M.L. Martins e D.A. Stariolo, "Cellular Automata Model for Gene Networks", *Physical Review E*, **55** (1997) 3262-3270.

(2) J.A. Freitas, "Modelos de Evolução Temporal", *Tese de Mestrado*, Universidade do Minho, 2012.

Master Degree in: Science — Further Education for Teachers

Name of the student: Rita Henriques Flores

Thesis: A Complexity Measure for 2D Cellular Automata

Abstract

In this dissertation we study three types of cellular automata: the 1-dimensional Elementary Cellular Automata and two 2-dimensional automata, the Peripheral Cellular Automata, and a family of Threshold Cellular Automata with a more complicated neighborhood structure. Building on a complexity parameter used by J. Sales, M. Martins e D. Stariolo⁽¹⁾ for the study of genetic regulatory models, we introduce a complexity parameter for automata. First, we show that, in the case of Elementary Cellular Automata, this parameter is able to distinguish the four classes proposed by Wolfram. Then, we use this complexity parameter to study the Peripheral Cellular Automata on the plane for which the final state is either a fixed point homogeneous configuration or a 2-cycle of the two homogeneous configurations. Our results allow us to conclude that, as noted earlier by J.A. Freitas⁽²⁾, these automata have homogeneous basins of attraction with different levels of complexity.

(1) J.A. de Sales, M.L. Martins e D.A. Stariolo, “Cellular Automata Model for Gene Networks”, *Physical Review E*, **55** (1997) 3262-3270.

(2) J.A. Freitas, “Modelos de Evolução Temporal”, *Tese de Mestrado*, Universidade do Minho, 2012.

Agradecimentos

Para a realização desta dissertação contei, fundamentalmente, com a ajuda, o apoio e, até posso mesmo ousar dizer, com a amizade do meu orientador Doutor Ricardo Severino, que sempre se disponibilizou com a sua sabedoria, conhecimento e alegria na elaboração e enriquecimento da mesma.

Agradeço à minha amiga Cátia, pela prontidão e apoio demonstrados.

Por fim, um obrigada à minha família pelo incentivo.

Conteúdo

1	Introdução aos Autômatos Celulares	1
1.1	Breve resenha histórica	1
1.2	Características fundamentais dos autômatos celulares	3
1.2.1	A forma de um autômato celular	3
1.2.2	Estados possíveis de uma célula	5
1.2.3	Regras de transição local	6
1.3	Autômatos celulares elementares	7
1.3.1	Regras de transição local e global	8
1.3.2	As vizinhanças para sistemas finitos	9
1.3.3	Representação de Wolfram das regras de transição local	10
1.3.4	Exemplos de autômatos celulares elementares: as regras 30, 90 e 110	13
1.3.5	Descrição da dinâmica de um autômato celular	18
1.3.6	Equivalência de regras de transição local	24
1.3.7	As quatro classes de complexidade segundo Wolfram	37
1.4	Distância de Hamming como medida da complexidade de um autômato	42
2	Autômatos Celulares Periféricos no Plano	51
2.1	Conceitos básicos	52
2.2	Equivalência de regras de transição local	59
2.3	Autômatos Celulares Periféricos Homogêneos no Plano	70

3	O Modelo de Sales, Martins e Stariolo	73
3.1	Um modelo computacional para a regulação genética	73
3.2	A dinâmica do modelo de Sales, Martins e Stariolo	84
4	Uma Medida de Complexidade	88
4.1	Modelo de Sales, Martins e Stariolo	89
4.2	Autómatos Celulares Elementares	92
4.3	Autómatos Celulares Periféricos no plano	98
5	Conclusões	106
	Bibliografia	108

Capítulo 1

Introdução aos Autómatos Celulares

Os Autómatos Celulares são modelos matemáticos discretos no tempo e no espaço, cuja evolução é regida por regras simples. Estes são utilizados para a determinação e/ou formação de padrões que tentam explicar fenómenos da natureza.

Os Autómatos Celulares são formados por unidades simples que interagem entre si, influenciando-se mutuamente. À medida que o sistema evolui no tempo, surgem estados complexos decorrentes dessas influências mútuas, sendo esta uma característica importante dos sistemas complexos.

Esta capacidade de gerar uma grande diversidade de padrões comportamentais complexos a partir de conjuntos de regras relativamente simples gerou um grande interesse por esta área da matemática nos últimos anos. Além disso, os Autómatos Celulares parecem ser modelos que conseguem descrever vários comportamentos complexos observados em sistemas naturais.

A simplicidade e a facilidade de implementação deste recurso matemático-computacional têm influenciado várias áreas do conhecimento como a Física, a Química, as Ciências Humanas e principalmente a Matemática e a Biologia, visto que essas foram as áreas motivadoras e impulsionadoras dos Autómatos Celulares.

1.1 Breve resenha histórica

Os Autómatos Celulares têm a sua origem nos trabalhos de John von Neumann (1903-1957), grande matemático americano de origem húngara, que iniciou o estudo desta importante ferramenta computacional ainda na década de 40. Nessa época, o matemático Stanislaw Ulam (1909-1984) fez uma sugestão a von Neumann que consistia na utilização de um mo-

delo muito simples para a modelação de sistemas biológicos autorreprodutivos, designando esses sistemas de espaços celulares. A partir daí, o objetivo de von Neumann passou a ser a procura de regras matemáticas que, no contexto dos espaços celulares, simulassem os princípios evolutivos da natureza. Essas regras, que seriam as mesmas para todos os componentes do sistema, deveriam partir de uma configuração inicial aleatória. Cada componente do sistema passaria por uma evolução que sofreria influência direta dos seus vizinhos e desse conjunto de regras. Embora essas regras sejam as mesmas para todos os componentes do sistema, a situação dos componentes pode variar de forma indefinida e complexa com o tempo, podendo originar novos sistemas e chegando até à sua autorreprodução.

Em 1970, o matemático John Horton Conway criou o "Jogo da Vida", um autómato celular que simulava alterações em populações de seres vivos baseados em regras locais simples. O "Jogo da Vida" era capaz de gerar padrões complexos, mostrando como um conjunto de regras básicas pode influenciar um sistema complexo. Neste Autómato Celular, cada célula nasce ou morre de acordo com as células vizinhas e o jogo tende à morte de todas as células ou a gerações de padrões estáveis.

Na década de 80, Stephen Wolfram estudou a Mecânica Estatística do funcionamento dos Autómatos Celulares e a formação de determinados padrões. Este matemático deu os primeiros passos na investigação de Autómatos Celulares como modelos matemáticos para sistemas estatísticos auto-organizados, tendo analisado Autómatos Celulares simples envolvendo sequências de células numa linha com valores binários. Ao longo do tempo (discreto) uma nova linha era criada e cada célula tinha o seu valor baseado nos valores das células vizinhas da linha anterior. Wolfram apresentou vários outros artigos estudando as propriedades algébricas dos Autómatos Celulares. Em 2002, publicou um trabalho único, lógico e conciso dos seus vinte anos de pesquisa, para comprovar toda a sua conjectura inicial: "The New Kind of Science".

Os Autómatos Celulares estudados por Wolfram são modelos matemáticos simples de sistemas naturais, constituídos por uma malha, ou rede, de células idênticas e discretas, onde cada célula pode assumir um estado que vai ser descrito por um valor escolhido num conjunto finito. Estes valores, isto é, o estado de cada célula, evoluem, em passos de tempo discretos, de acordo com regras determinísticas que especificam os valores de cada célula num determinado instante em termos dos valores das células vizinhas no instante anterior. Vejamos então, com mais algum pormenor, quais as características principais destes sistemas.

1.2 Características fundamentais dos autómatos celulares

Os Autómatos Celulares distinguem-se segundo determinadas características, tais como, a sua dimensão, geometria, vizinhança, estados possíveis e regras de transição. De seguida, vamos analisar cada uma destas características, destacando aquelas que são mais comuns nos estudos atuais.

1.2.1 A forma de um autómato celular

Os Autómatos Celulares mais simples que podemos conceber são dados por uma sequência, finita ou infinita, de células colocadas ao longo de uma linha: são por isso chamados Autómatos Celulares unidimensionais (1D). Na figura seguinte ilustramos esta ideia mostrando uma sequência de 18 células, aqui representadas por quadrados, justapostas ao longo de uma linha.



Figura 1.1: Sistema formado por uma sequência de 18 células.

Contudo, esta não é a única forma de construir um sistema celular: vamos dizer que um Autómato Celular é bidimensional (2D) quando o sistema é formado por uma distribuição regular de células, em número finito ou infinito, ao longo de um plano. A figura seguinte mostra um exemplo de uma dessas distribuições regulares num plano, neste caso, 160 células dispostas numa rede quadrada ao longo de um rectângulo composto por 8 linhas e 20 colunas.

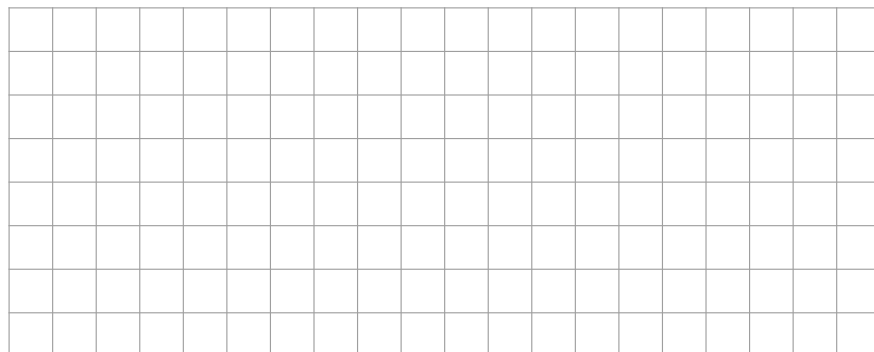


Figura 1.2: Sistema formado por 160 células dispostas numa rede quadrada ao longo de um rectângulo composto por 8 linhas e 20 colunas.

Contrariamente aos sistemas onde as células se dispõem numa linha, podemos escolher diferentes geometrias para as células dos Autómatos Celulares bidimensionais. De facto, a condição fundamental de termos uma distribuição regular de células deixa, neste caso, alguma liberdade para a escolha da forma das células: assim, podemos ter uma distribuição de células ao longo de uma rede triangular, quadrada, ou mesmo hexagonal. No fundo, estamos perante um problema de conseguir uma pavimentação do plano por polígonos regulares. Na figura seguinte está representado um Autómato Celular bidimensional onde cada uma das suas 242 células, dispostas numa rede regular, tem uma forma triangular.

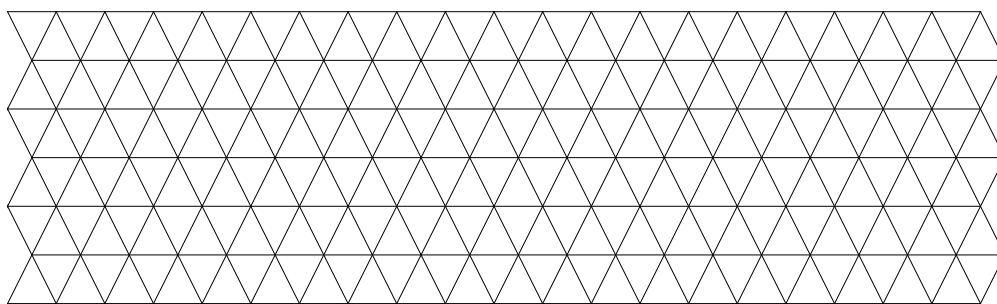


Figura 1.3: Sistema formado por 242 células dispostas numa rede triangular ao longo de uma malha composta por 6 linhas e 40 colunas.

A escolha da forma das células de um Autómato Celular bidimensional é determinada por uma outra importante característica destes sistemas: o número de células que assumimos influenciar o estado de cada célula¹. Se voltarmos às duas figuras anteriores, facilmente se percebe que, no primeiro caso, é natural assumir que cada célula veja as quatro células que têm uma aresta comum com ela², sendo esse número apenas igual a três, no segundo. Contudo estes números podem ser alterados, bastando para tal tomar como células vizinhas as células que têm vértices em comum com a mesma.

Na figura seguinte mostramos as vizinhanças de uma célula quando consideramos apenas as células que estão em contacto direto com ela através de uma aresta, à esquerda, e quando consideramos, para além dessas, aquelas em que o contacto é realizado através dos vértices. Dependendo se incluimos a própria célula, vemos que no primeiro caso a célula é influenciada por quatro ou cinco células, enquanto no segundo esse número é já igual a oito ou nove.

¹O conjunto das células que determinam o estado de uma célula no instante seguinte é habitualmente denominado de seus vizinhos; neste contexto a própria célula pode pertencer ao conjunto dos seus vizinhos.

²Foi esse o conjunto de células que von Neumann utilizou quando pretendeu construir uma máquina autorreprodutora, sendo por isso agora designada por "vizinhança de von Neumann".

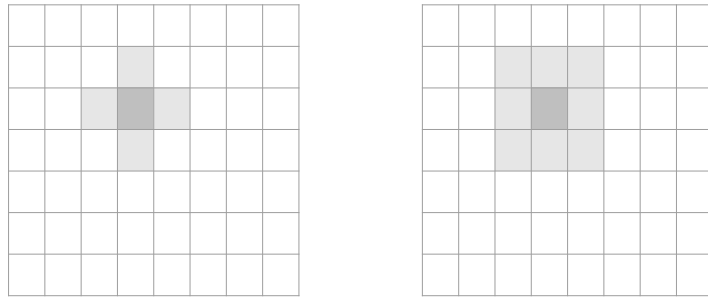


Figura 1.4: A vizinhança de von Neumann, formada por quatro ou cinco células, e de Moore, formada por oito ou nove células.

Como facilmente se constata, é natural assumir que um sistema cujas células tenham uma geometria hexagonal cada uma delas está em contacto direto, isto é, através das arestas dos polígonos, com as seis outras células que a envolvem. Resumindo, existem três tipos de pavimentações regulares, triangular, quadrada e hexagonal, que vamos fazer corresponder a sistemas com vizinhanças compostas por um determinado número de células. Caso a situação a ser modelada exija um número superior de células a determinar o estado de cada célula, podemos sempre considerar as células que, não estando em contacto direto com ela, estão ainda a uma distância razoável para que seja plausível a interacção entre elas.

A colocação de células numa linha ou num plano não esgota todas as possibilidades, pelo que existem ainda Autómatos Celulares de dimensões superiores a 2. Apesar das dificuldades do estudo de um autómato tridimensional, sobretudo pela perda da capacidade para representar graficamente os diferentes estados do sistema, existem fenómenos que exigem um tipo de modelo com essas características. Contudo, este trabalho vai cingir-se ao estudo de autómatos de dimensões um e dois.

1.2.2 Estados possíveis de uma célula

Na construção de um Autómato Celular podemos definir que cada uma das suas células pode assumir vários estados diferentes, sempre em número finito. No primeiro autómato celular implementado, John von Neumann teve necessidade de estipular que cada célula podia assumir 29 estados distintos, número gigantesco se pensarmos que, hoje em dia, os Autómatos Celulares mais comuns admitem apenas dois estados diferentes para cada uma das suas células.

Para os Autómatos Celulares em que temos apenas dois estados possíveis, estes são habitualmente descritos de diferentes maneiras: ora dizendo que a célula está "viva", ou

"morta"; ou através dos símbolos 1 ou 0; ou, graficamente, representando as células pintadas de duas cores diferentes, muitas vezes de preto e branco. Na figura seguinte voltamos a representar o Autômato Celular unidimensional representado na Figura 1.1, só que agora ficando explícito em que estado se encontra cada uma das suas células.



Figura 1.5: Sistema composto por uma sequência de 18 células, onde o estado de cada uma delas, 0 ou 1, está representado por uma cor diferente.

Procedendo de forma análoga para o Autômato Celular bidimensional mostrado na Figura 1.2, na figura seguinte está representado esse mesmo sistema, só que agora mostrando exatamente qual o estado de cada uma das suas células.

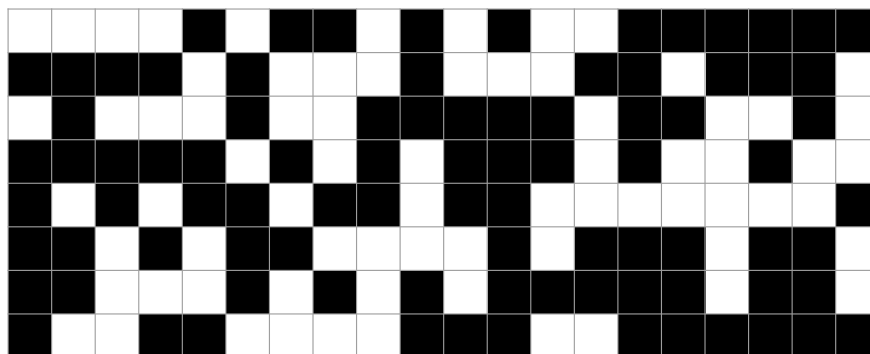


Figura 1.6: Sistema composto por uma rede quadrada de 8×20 células, onde o estado de cada uma delas, 0 ou 1, está representado por uma cor diferente.

1.2.3 Regras de transição local

Um Autômato Celular pretende ser um modelo de evolução temporal, pelo que falta acrescentar um dos ingredientes mais importantes: a forma como se determina o estado de cada uma das suas células num qualquer instante, isto é, a regra de transição local do sistema.

A primeira condição que vamos adotar diz-nos que o estado de uma célula num instante T deve depender apenas dos estados de células do sistema no instante imediatamente anterior a esse. A segunda condição impõe que todas as células do sistema partilhem a mesma regra de transição. Resumindo, podemos dizer que a evolução temporal de um Autômato Celular é obtida por uma (única) regra determinista que especifica o estado de cada célula dependendo dos estados das células vizinhas. Se denotarmos por d o número de estados

admissíveis para cada célula de um Autómato Celular e por K o número de células que influenciam a evolução temporal de cada célula do sistema, podemos afirmar que existem d^K configurações distintas para a vizinhança de uma célula. Deste modo, especificar a regra de transição local de um Autómato Celular implica ter uma resposta para cada uma das d^K configurações possíveis, pelo que, fixados d e K , o número de Autómatos Celulares distintos é igual ao número de regras de transição local diferentes, isto é, $d^{(d^K)}$. Um exemplo basta para perceber como este número é muitíssimo grande mesmo para escolhas simples: sistemas bidimensionais, onde as células podem apenas assumir dois estados e considerando vizinhanças de Moore de nove células, tem um número de escolhas possíveis igual a 2^{512} , ou seja, um número superior a 10^{154} .

A terceira e última condição que se exige habitualmente para a evolução temporal dos Autómatos Celulares determina que a aplicação da regra de evolução temporal seja efetuada em instantes discretos, por passos no tempo $T = 0, 1, 2, 3, \dots$, e de forma síncrona para todas as células, isto é, todas as células devem atualizar o seu estado simultaneamente. Como é usual nos modelos de evolução temporal, o estado do Autómato Celular no tempo $T = 0$ é referido como a configuração inicial do sistema. Dependendo do tipo de estudo que se pretende efetuar, esta configuração inicial é escolhida a partir de uma com determinadas características (a aleatoriedade é uma dessas características, mas podemos escolher configurações iniciais com uma única célula num estado diferente das restantes).

De seguida, iremos apresentar com mais pormenor os Autómatos Celulares Elementares, isto é, os sistemas mais simples que ainda apresentam uma evolução temporal interessante.

1.3 Autómatos celulares elementares

Sem querer retirar valor aos contributos de von Neumann e Conway, pensamos que foi a partir dos trabalhos de Wolfram, sobretudo aqueles realizados ainda na década de 1980, que este tipo de modelo de evolução temporal adquiriu o estatuto que hoje tem na compreensão dos sistemas complexos. De facto, podemos dizer que foram as pesquisas iniciais de Wolfram que revelaram como um sistema determinista extremamente simples podia apresentar um comportamento extraordinariamente complicado: os Autómatos Celulares mais simples que são capazes de exibir uma dinâmica complicada foram, a partir de então, designados por Autómatos Celulares Elementares.

Definição 1.1. *Os Autómatos Celulares unidimensionais, com as suas células a assumirem um de dois valores, a partir dos estados de uma vizinhança de apenas três vizinhos, a célula que se encontra à sua esquerda, a própria célula e a célula que se encontra à sua direita, são chamados elementares.*

De seguida vamos estudar com algum pormenor a dinâmica destes autómatos celulares mais simples.

1.3.1 Regras de transição local e global

Consideremos um Autómato Celular Elementar e denotemos por $c_i(T)$ o estado da sua célula i num momento T . Assim, podemos escrever que o estado duma célula num instante $T + 1$ é obtido a partir dos estados das células suas vizinhas no instante anterior como

$$c_i(T + 1) = \phi(c_{i-1}(T), c_i(T), c_{i+1}(T)), \quad (1.1)$$

com ϕ uma qualquer função booleana de três variáveis. Vejamos um exemplo.

Consideremos a seguinte função de transição local:

$$c_i(T + 1) = c_{i-1}(T) + c_i(T) + c_{i+1}(T) \mod 2. \quad (1.2)$$

Como podemos ver, a função booleana é, neste caso, a soma módulo 2 dos estados das três células da vizinhança. Como é habitual, podemos visualizar numa tabela os diferentes valores desta função booleana que traduz a regra de transição local do autómato:

$c_{i-1}(T)$	$c_i(T)$	$c_{i+1}(T)$	$c_i(T + 1)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Tabela 1.1: Descrição da função booleana dada pela soma, módulo 2, dos estados das três células pertencentes à vizinhança.

Identificada a dinâmica de cada uma das células do sistema, e uma vez que essa atualização vai ser feita simultaneamente para todas as células, podemos formalizar a dinâmica do

autômato em termos globais do seguinte modo: denotemos por $C(T) \in \{0, 1\}^N$, com N igual a um qualquer número natural ou igual a \mathbb{Z} , a configuração do sistema num instante T , isto é, $(C(T))_i = c_i(T)$, com $i = 1, \dots, N$ ou $i \in \mathbb{Z}$. Então, vamos dizer que a configuração do sistema no instante $T + 1$ é obtida da configuração no instante anterior a partir de uma regra de transição global Φ ,

$$C(T + 1) = \Phi(C(T)), \quad (1.3)$$

onde Φ é determinada componente-a-componente pela regra de transição local ϕ ,

$$(C(T + 1))_i = (\Phi(C(T)))_i = \phi(c_{i-1}(T), c_i(T), c_{i+1}(T)). \quad (1.4)$$

Dependendo do contexto, vamos falar de um Autômato Celular indicando a regra de transição local ϕ ou a regra de transição global Φ que lhe está associada. De seguida vamos resolver o problema das vizinhanças das células que ocupam os extremos do sistema, quando este é finito.

1.3.2 As vizinhanças para sistemas finitos

Como vimos anteriormente, num Autômato Celular considera-se que cada célula do sistema evolui em função do estado de um determinado conjunto de células, a sua vizinhança. No caso dos Autômatos Celulares Elementares temos que as células que pertencem à vizinhança de uma célula são aquelas que lhe são adjacentes. Ora, quando estamos a considerar sistemas com um número finito de elementos, na evolução do autômato ocorre uma situação chamada *efeito borda*, devido à inexistência de vizinhos esquerdo e direito, respetivamente, das células que se encontram na fronteira. Este problema pode ser contornado, havendo três possibilidades de o resolver:

- *Periodicidade*, isto é, considerando a estrutura do Autômato Celular como sendo uma estrutura periódica. Para tanto é necessário impor a condição de que a última célula do sistema é vizinha da primeira e que a primeira célula é vizinha da última. Sendo assim, teremos que a última célula será ligada à primeira.



Figura 1.7: Sistema composto por uma sequência de 18 células, onde estão representadas igualmente as duas células correspondentes a condições de fronteira periódicas.

- *Reflexão*, por duplicação das células dos extremos do Autômato Celular, cada uma tomando por vizinha uma cópia de si própria.



Figura 1.8: Sistema composto por uma sequência de 18 células, onde estão representadas igualmente as duas células correspondentes a condições de fronteira por reflexão.

- *Valor fixo*, isto é, considerando-se que existem células "invisíveis" nos extremos do Autômato Celular com um estado pré-definido, com um valor 0 ou um valor 1.



Figura 1.9: Sistema composto por uma sequência de 18 células, onde estão representadas igualmente as duas células correspondentes a condições de fronteira fixadas *a priori*, neste caso células com o estado um.

A escolha do tipo de condições de fronteira é muitas vezes determinada pelo fenómeno que o autômato pretende modelar. Neste trabalho vamos considerar apenas Autômatos Celulares Elementares finitos com condições de fronteira periódicas.

Resolvido o problema das vizinhanças das células que ocupam os extremos de um sistema finito, podemos começar a simular um autômato celular e a ter um primeiro contacto com as diferentes dinâmicas que este tipo de sistema admite.

1.3.3 Representação de Wolfram das regras de transição local

A partir do que atrás ficou dito, podemos facilmente concluir que, para os Autômatos Celulares Elementares, existem $2^3 = 8$ configurações diferentes para a vizinhança de uma qualquer célula. Na figura seguinte apresentamos essas oito configurações possíveis para a vizinhança de uma célula:



Figura 1.10: As oito configurações possíveis para a vizinhança de uma célula.

Sendo assim, especificar uma regra de evolução temporal para o sistema significa dar uma resposta para cada uma das 8 situações distintas, pelo que podemos imediatamente afirmar

que existem $2^8 = 256$ diferentes regras de transição. Na figura seguinte vamos mostrar um exemplo de uma dessas regras: para cada célula, neste caso a célula central, é representado o estado de cada uma das células da sua vizinhança no instante T ; e, logo abaixo, encontra-se uma figura representando a atualização do estado dessa mesma célula no instante $T + 1$.

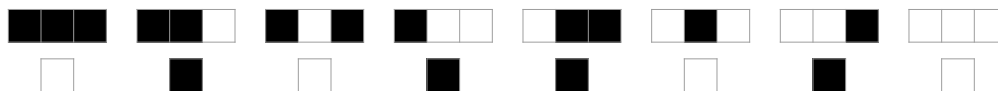


Figura 1.11: Regra de transição, onde se explicita o estado determinado por cada uma das oito configurações possíveis para a vizinhança.

Comparando esta regra de transição local com aquela que foi descrita anteriormente, quer através de uma expressão matemática, em (1.2), quer através de uma tabela, na Tabela 1.1, facilmente se conclui que estamos perante diferentes representações da mesma função booleana.

Na figura seguinte são apresentadas as configurações de um Autômato Celular Elementar constituído por 30 células nos instantes $T = 1$ e $T = 2$, a partir de uma configuração inicial aleatoriamente escolhida, com condições de fronteira periódicas e sujeito à regra de transição descrita acima, na Figura 1.11. Como facilmente se reconhece, a análise da evolução temporal do sistema fica mais simples se empilharmos as diferentes configurações, a partir da configuração inicial, com o tempo a crescer de cima para baixo, isto é, quando numa linha colocamos uma configuração e logo na linha inferior colocamos o resultado que se obtém na geração seguinte.

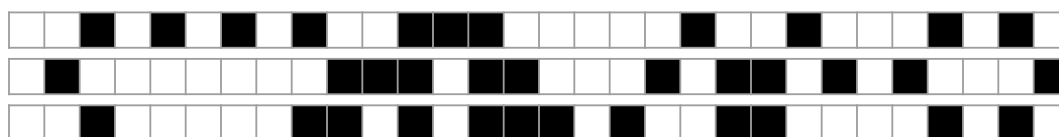


Figura 1.12: Diagrama espaço-tempo da evolução de um autômato celular composto por 30 células, ao longo de três instantes de tempo.

Como todas as oito vizinhanças distintas surgem neste exemplo, é muito fácil confirmar que a evolução temporal deste sistema é realmente determinada pela regra descrita graficamente na Figura 1.11.

Em [Wolfram, 1984a], Wolfram introduziu uma forma de representar um qualquer Autómatos Celular Elementar por um número inteiro entre 0 e 255. Vejamos como é possível construir essa correspondência.

Consideremos o conjunto das oito vizinhanças diferentes que uma célula de um Autómatos Celular Elementar pode ter. Se fixarmos uma determinada ordem para essas vizinhanças, exatamente a ordem com que estas foram apresentadas acima, então podemos caracterizar um autómato apenas pelas respostas que ele determina para cada uma dessas situações. Por outras palavras, nessas condições, uma regra de transição local fica totalmente explicitada pelos oito dígitos $d_7, d_6, d_5, d_4, d_3, d_2, d_1, d_0$ dados por

$$\begin{aligned} d_7 &= \phi(1, 1, 1) & d_6 &= \phi(1, 1, 0) & d_5 &= \phi(1, 0, 1) & d_4 &= \phi(1, 0, 0) \\ d_3 &= \phi(0, 1, 1) & d_2 &= \phi(0, 1, 0) & d_1 &= \phi(0, 0, 1) & d_0 &= \phi(0, 0, 0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Deste modo, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre regras de transição local e números inteiros.

Definição 1.2. *Dado um Autómatos Celular Elementar Φ , chama-se representação de Wolfram de Φ ao número inteiro $N(\Phi)$ obtido como*

$$N(\Phi) = (d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_2,$$

com os dígitos d_k , com $k = 0, \dots, 7$, dados pelas igualdades (1.5).

Voltando ao exemplo anterior, ver Figura 1.11, vamos começar por registar os diferentes dígitos correspondentes às respostas da regra de transição local, 01011010, para depois converter este código binário num número inteiro, a saber,

$$(01011010)_2 = 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 90.$$

Podemos assim concluir que a representação de Wolfram desse Autómatos Celular Elementar é o inteiro 90.

De igual forma, podemos desenhar a regra de transição local do Autómatos Celular Elementar Φ cuja representação de Wolfram é $N(\Phi) = 110$: começamos por escrever o inteiro 110 em base 2, isto é, $110 = (01101110)_2$, e assim identificar cada uma das respostas que esta regra de transição local determina para cada uma das oito vizinhanças. Na figura seguinte apresentamos a regra de transição com representação de Wolfram $N(\phi) = 110$.

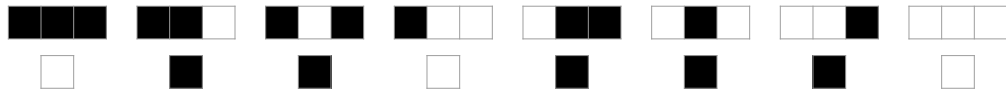


Figura 1.13: Regra de transição com representação de Wolfram $N(\phi) = 110$.

A importância do estudo dos Autômatos Celulares Elementares fica patente quando simulamos a evolução temporal de alguns deles, para um número não muito pequeno de células. De seguida, vamos estudar três Autômatos Celulares Elementares, aqueles cujas regras de transição local têm a representação de Wolfram $N(\phi) = 30$, $N(\phi) = 90$ e $N(\phi) = 110$.

1.3.4 Exemplos de autômatos celulares elementares: as regras 30, 90 e 110

Caracterizados os Autômatos Celulares Elementares, podemos agora simular a evolução temporal de um sistema desse tipo, a partir de uma configuração inicial do sistema. Foi a observação da representação gráfica de muitas simulações que levou Wolfram a perceber como sistemas tão simples como estes mostravam, em alguns casos, dinâmicas extremamente complicadas.

Autômato Celular Elementar com Regra de Transição Local 30

Consideremos o Autômato Celular Elementar com representação de Wolfram $N(\Phi) = 30$, cuja regra de transição local se representa na figura seguinte:

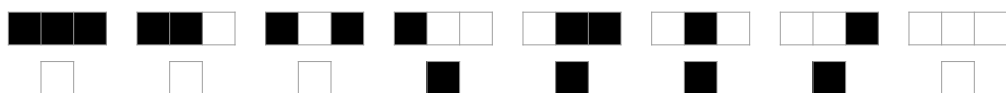


Figura 1.14: Regra de transição com representação de Wolfram $N(\phi) = 30$.

Para avaliarmos o tipo de dinâmica que um sistema regido por esta regra exhibe, fomos simular um sistema composto por 400 células, perante condições de fronteira periódicas, durante 200 instantes de tempo, a partir de uma configuração inicial escolhida aleatoriamente. O diagrama espaço-tempo obtido foi o seguinte:

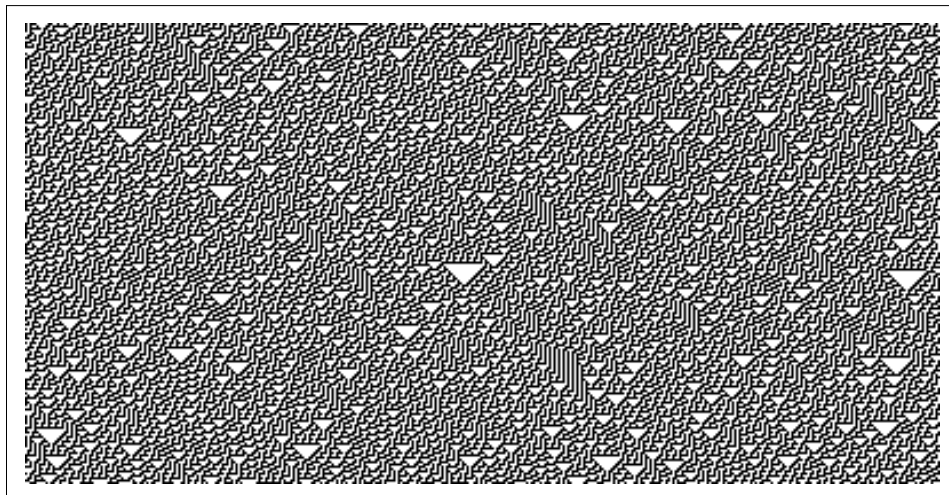


Figura 1.15: Diagrama espaço-tempo obtido pela simulação do autômato $N(\Phi) = 30$ para um sistema com 400 células, durante 200 instantes de tempo, a partir de uma configuração inicial escolhida aleatoriamente.

É também muito interessante fazer uma simulação da mesma regra a partir de uma outra configuração inicial, completamente distinta da primeira: neste caso vamos escolher o estado 1 para uma qualquer célula do sistema, habitualmente uma das células centrais do diagrama espaço-tempo, deixando todas as outras células no estado 0. A figura seguinte mostra o diagrama espaço-tempo obtido.

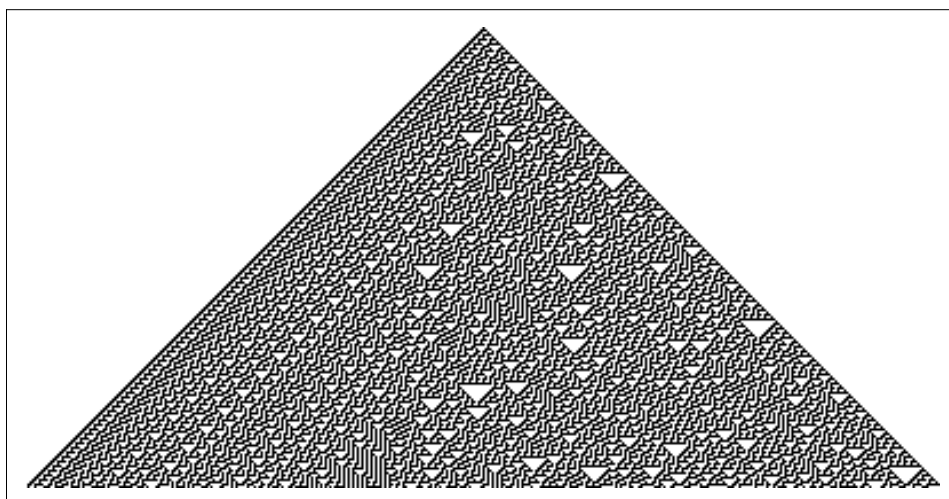


Figura 1.16: Diagrama espaço-tempo obtido pela simulação do autômato $N(\Phi) = 30$ para um sistema com 400 células, durante 200 instantes de tempo, a partir de uma configuração inicial com todas as células, exceto uma, no estado 0.

Observando estes dois diagramas espaço-temporais, é evidente o elevado grau de aleatoriedade que eles revelam: ao investigar esta regra através de experiências estatísticas, [Wolfram, 1984b], Wolfram concluiu que a sequência dos estados 1 ou 0 era totalmente

aleatória. Na segunda situação, começando apenas com uma célula com um estado diferente na primeira geração, é visível que a influência da perturbação cresce com o tempo, mas não é possível descobrir qualquer padrão particular dentro desse triângulo.

Autómato Celular Elementar com Regra de Transição Local 90

Um outro Autómato Celular Elementar que apresenta umas características curiosas é aquele com representação de Wolfram $N(\Phi) = 90$, cuja regra de transição local se representa de seguida.

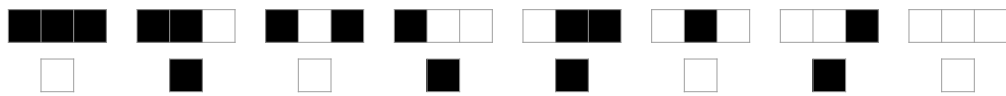


Figura 1.17: Regra de transição com representação de Wolfram $N(\phi) = 90$.

De facto, se efetuarmos a simulação de um sistema análogo ao anterior, para uma configuração inicial homogénea exceto numa célula central, durante 192 instantes de tempo, o diagrama espaço-tempo resultante mostra a seguinte figura triangular:

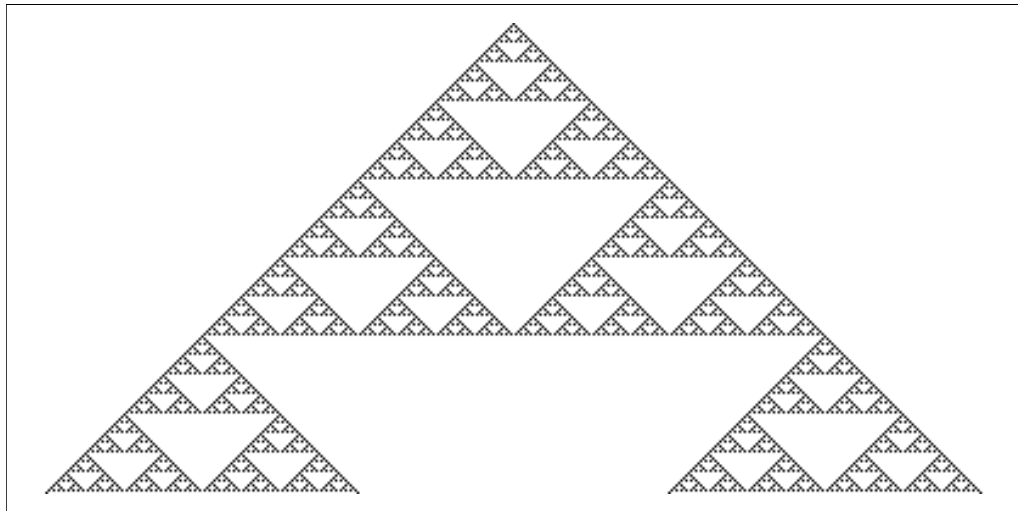


Figura 1.18: Diagrama espaço-tempo obtido pela simulação do autómato $N(\Phi) = 90$ para um sistema com 400 células, durante 192 instantes de tempo, a partir de uma configuração inicial com todas as células, exceto uma, no estado 0.

Observando o diagrama obtido, vemos que a aplicação da regra 90 resulta, de início, numa forma triangular com dimensão fractal, isto é, no interior do triângulo maior vemos que existem outros do mesmo tipo, mas de menor comprimento, e em diferentes níveis hierárquicos,

propriedade conhecida como autossemelhança³. Como facilmente se antecipa, esta construção vai ser perturbada quando o triângulo chega às células da fronteira, uma vez que as condições de fronteira periódicas vão alterar um pouco a forma como anteriormente se tinha levado a cabo o crescimento da construção.

O padrão autossemelhante encontrado no diagrama espaço-tempo de autómatos celulares possui correspondentes na natureza: de facto, muitos sistemas naturais, incluindo o floco de neve, parecem exibir padrões fractais. Deste modo, é provável que, em muitos casos, esse padrão fractal seja gerado pela evolução de um autómato celular ou por um processo análogo. Por exemplo, observando o padrão de pigmentação encontrado nas conchas de determinados moluscos, não é muito difícil aceitar que o crescimento desses padrões na pigmentação da concha siga, de alguma forma, as regras simples dos Autómatos Celulares Elementares.



Figura 1.19: Fotografia da concha de um molusco, onde é possível observar um padrão muito semelhante aos que se obtêm nas simulações do autómato celular $N(\Phi) = 90$.

Autómato Celular Elementar com Regra de Transição Local 110

Por fim, vamos simular a evolução temporal de um dos mais interessantes autómatos celulares, o Autómato Celular Elementar com representação de Wolfram $N(\Phi) = 110$. Tal como todos os outros, também neste caso estamos perante um sistema regido por uma regra de transição determinista extremamente simples:

³Esta figura foi pela primeira vez descrita, em 1915, pelo matemático polaco Wacław Sierpinski, daí ser conhecida como o triângulo Sierpinski.

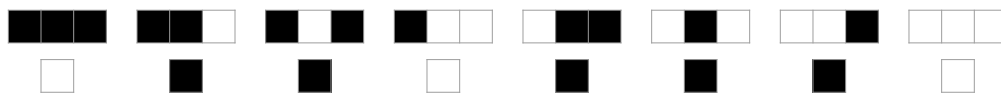


Figura 1.20: Regra de transição com representação de Wolfram $N(\phi) = 110$.

Contudo, a dinâmica que este autômato consegue exibir é de uma complexidade inesperada, sobretudo tendo em conta a simplicidade da regra que determina a sua evolução temporal. Para percebermos em que consiste essa complexidade, vamos simular um sistema composto por 400 células, a partir de uma configuração inicial escolhida aleatoriamente, durante 500 instantes de tempo. O diagrama espaço-tempo obtido mostra-se na figura seguinte:

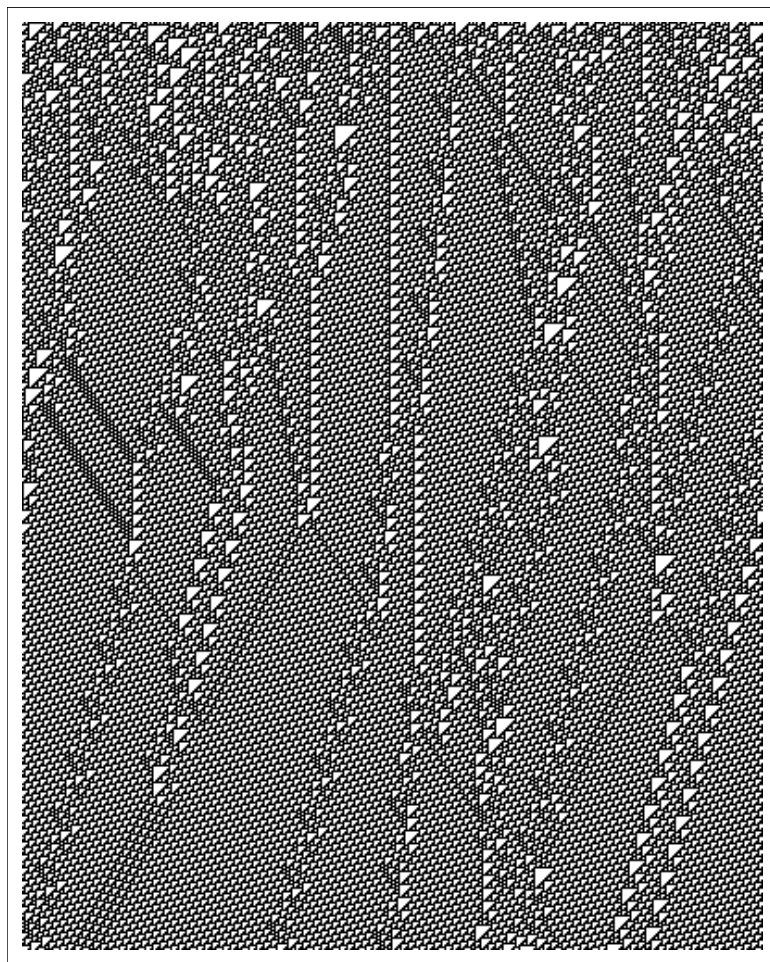


Figura 1.21: Diagrama espaço-tempo obtido pela simulação do autômato $N(\Phi) = 110$ para um sistema com 400 células, durante 500 instantes de tempo, a partir de uma configuração inicial escolhida aleatoriamente.

Tal como observado na primeira das simulações apresentadas, ver Figura 1.15, este diagrama espaço-tempo não parece apresentar um qualquer padrão. Contudo, para este caso, é

notório que a ausência desse padrão se deve apenas a perturbações de carácter local que se movimentam ao longo do sistema⁴.

Nos seus estudos, Wolfram suspeitou que a complexidade evidenciada por este autómato o tornava muito especial, tendo então conjecturado que este seria capaz de fazer computação universal. Isso mesmo veio a ser demonstrado, já na década de 2000, pelo seu assistente Matthew Cook, [Cook, 2004].

De modo geral, Wolfram teve o mérito de ser o primeiro a demonstrar que um Autómato Celular Elementar pode exibir um comportamento complexo, mesmo a partir de regras de transição locais extremamente simples. Por outro lado, os seus estudos mostraram que algumas dessas regras podem levar a uma espécie de auto-organização do sistema, algo que contribuiu para uma maior compreensão de fenómenos de formação espontânea de padrões.

1.3.5 Descrição da dinâmica de um autómato celular

Para a grande maioria dos Autómatos Celulares Elementares só é possível ter uma ideia das dinâmicas admissíveis efetuando simulações a partir de configurações iniciais escolhidas aleatoriamente. De facto, caso o número de células do sistema não seja muito pequeno, verifica-se que o número total de configurações do sistema é extraordinariamente grande, sendo por isso impossível pretender conhecer a dinâmica do autómato com todo o detalhe. Contudo, nos casos em que o sistema tem um número reduzido de elementos, é possível representar num grafo todos os pormenores da evolução temporal determinada pelo autómato: são os chamados grafos de Wuensche.

Consideremos um sistema composto por apenas seis células, cuja evolução temporal é determinada pela regra de transição local $N(\phi) = 184$.

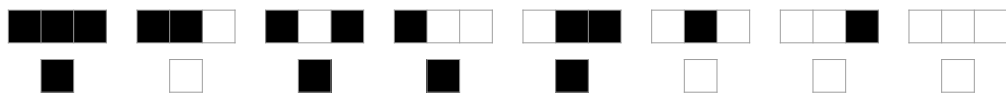


Figura 1.22: Regra de transição com representação de Wolfram $N(\phi) = 184$.

⁴Contrariamente ao que se observa no diagrama da regra 30, onde a falta de um padrão é transversal a todo o sistema.

Sendo o número de configurações possíveis para o sistema extremamente diminuto, apenas $2^6 = 128$, é possível estudar a evolução temporal de cada uma delas. Desse modo, verifica-se que duas dessas configurações, designadas por configurações homogêneas, por todas as células do sistema assumirem o mesmo estado, têm a particularidade de ficar invariante com o tempo:



Figura 1.23: Evolução temporal do Autômato Celular Elementar $N(\phi) = 184$, formado por seis células, a partir das duas configurações iniciais homogêneas. Verifica-se que, em ambos os casos, o sistema vai repetir, indefinidamente, a configuração inicial.

Este tipo de evolução temporal denomina-se por ponto fixo, uma vez que se assiste a uma repetição infinita de uma mesma configuração. Verifica-se facilmente que estas são as únicas configurações do sistema com estas características. A generalização destes conceitos para um qualquer autômato pode fazer-se da seguinte forma.

Definição 1.3. Diz-se que um Autômato Celular Elementar Φ admite um ponto fixo se existe uma configuração C tal que

$$C(T + 1) = \Phi(C(T)) = C(T).$$

Outra evolução temporal interessante é a repetição para sempre de um conjunto de configurações do sistema: voltando ao exemplo anterior, verifica-se facilmente que existe um conjunto de duas configurações cuja evolução temporal se vai repetir ciclicamente.

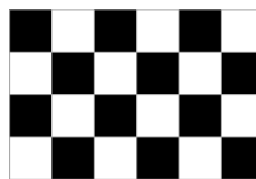


Figura 1.24: Diagrama espaço-tempo do sistema revelador que a evolução temporal da configuração onde o estado das células alterna entre o 1 e o 0 passa por uma repetição cíclica de duas configurações.

Por outro lado, também é possível identificar que o sistema admite outros dois conjuntos, desta vez compostos por três configurações do sistema, com características semelhantes, isto é, cuja evolução temporal não é mais que a sua repetição cíclica.

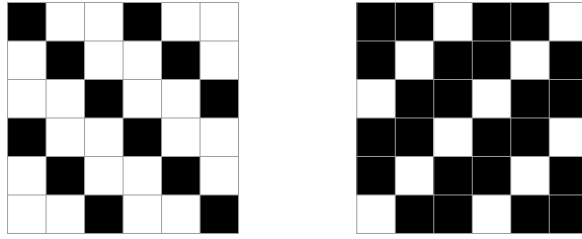


Figura 1.25: Diagramas espaço-tempo do sistema revelador que a evolução de ambas as configurações iniciais escolhidas passa por uma repetição cíclica de três configurações.

Por fim, existem também quatro conjuntos, agora de seis configurações do sistema, cuja dinâmica mostra uma repetição cíclica entre as configurações que o compõem.

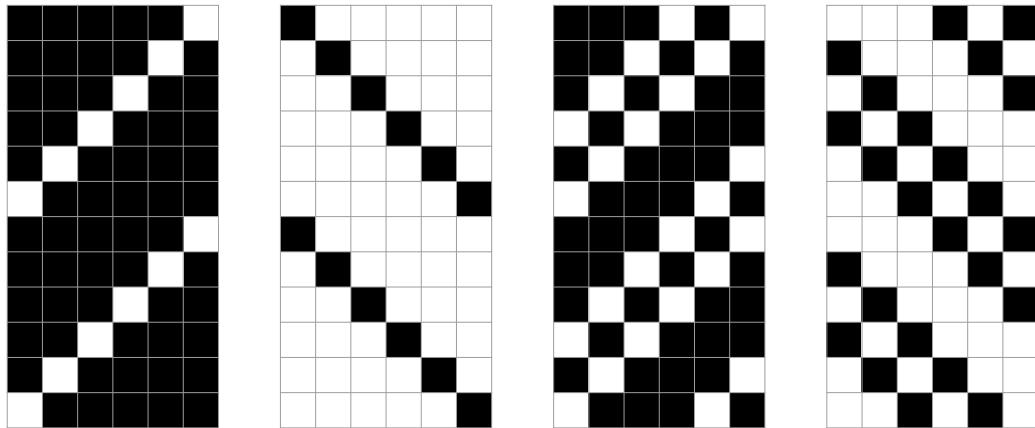


Figura 1.26: Diagramas espaço-tempo do sistema revelador que a evolução das quatro configurações iniciais escolhidas passa por uma repetição cíclica de seis configurações.

A característica comum a todos estes exemplos é que a evolução temporal do sistema é ainda muito simples, na medida em que se assiste a uma repetição, para sempre, de um certo número de configurações: este tipo de evolução temporal denomina-se por ciclo. Assim, no primeiro caso dizemos que estamos perante um ciclo de período 2, perante a repetição de duas configurações, no segundo caso perante dois ciclos de período três, pois desta vez são três as configurações que se repetem, e no terceiro caso perante quatro ciclos de período seis, pois são já seis as configurações que se vão repetir. De uma forma geral, vamos dizer que um autómato admite um ciclo de configurações nas seguintes circunstâncias:

Definição 1.4. Diz-se que um Autômato Celular Elementar Φ admite um ciclo se existe um conjunto de configurações $\{C_1, \dots, C_p\}$, com $p > 1$, tal que

$$\begin{aligned} C_n(T+1) &= \Phi(C_n(T)) = C_{n-1}(T), \quad n = 2, \dots, p \\ C_1(T+1) &= \Phi(C_1(T)) = C_p(T) \end{aligned}$$

O número p diz-se o período do ciclo.

No caso de Autômatos Celulares Elementares com um número finito N de elementos, facilmente se conclui que o destino de uma qualquer configuração é um ponto fixo ou um ciclo, pois ao fim de 2^N instantes de tempo o sistema estará obrigatoriamente a repetir uma qualquer configuração. Nesse sentido, diz-se que os pontos fixos e os ciclos de um autômato são os atratores do sistema. Associado a um atrator vai estar o conjunto de todas as configurações do sistema cujo futuro é repetir a configuração, ou as configurações, do atrator.

Definição 1.5. Seja Φ um Autômato Celular Elementar e seja \mathcal{A} um atrator de Φ . Então, vamos chamar bacia de atração de \mathcal{A} , e denotar por $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, ao conjunto de todas as configurações do sistema a partir das quais, após um tempo T , é possível ao sistema chegar a uma configuração pertencente a \mathcal{A} .

A partir da definição podemos perceber que a bacia de atração de um atrator do sistema nunca é um conjunto vazio, pois pelo menos as configurações do atrator vão pertencer à bacia de atração.

Voltemos uma vez mais ao exemplo anterior e consideremos o ciclo atrator composto pelas duas configurações cujas células alternam os seus estados. Quais serão as configurações do sistema que vão pertencer à bacia de atração deste ciclo? Estudando a evolução temporal de todas as configurações do sistema é possível identificar quais as que, após alguns instantes, vão percorrer o ciclo referido. Começemos pelas configurações do sistema que, após um instante de tempo, encontram uma das configurações do ciclo atrator.

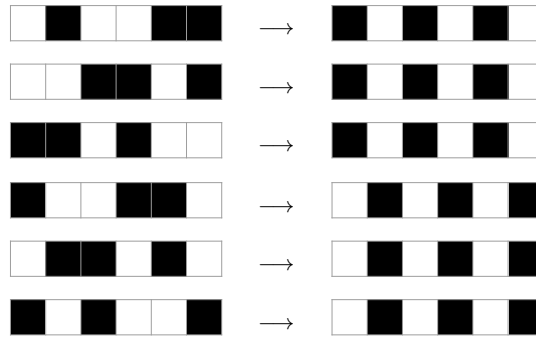


Tabela 1.2: As seis configurações do sistema para as quais um instante de tempo é suficiente para o sistema encontrar uma das configurações do ciclo atrator.

Mas estas não são as únicas configurações do sistema que pertencem à bacia do ciclo atrator referido. De facto, existem outras 12 configurações do sistema que, agora após dois instantes de tempo, também levam o sistema a assumir uma das configurações do ciclo atrator.

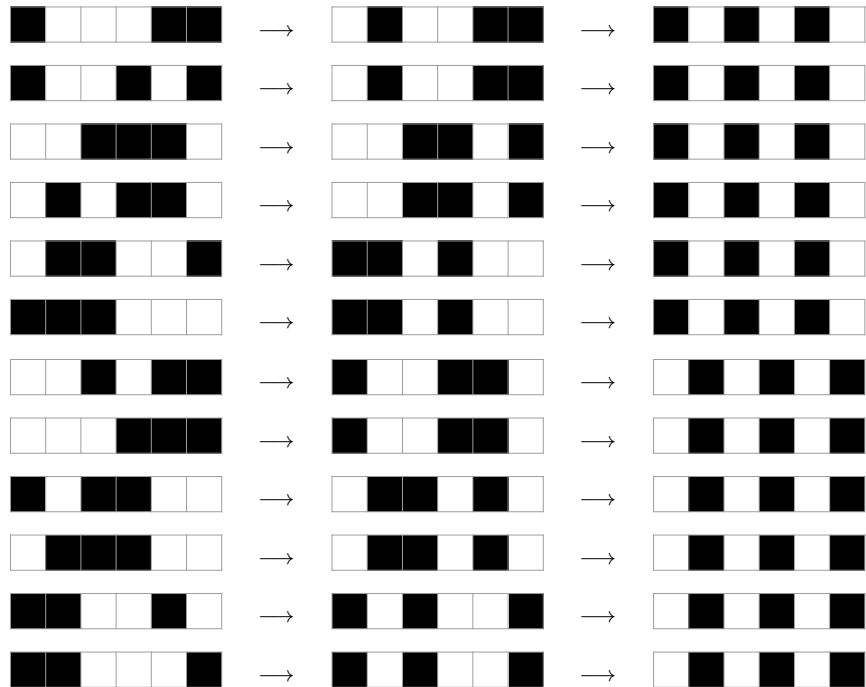


Tabela 1.3: As 12 configurações do sistema para as quais dois instantes de tempo são necessários para o sistema encontrar uma das configurações do ciclo atrator.

Assim sendo, podemos concluir que 20 configurações do sistema pertencem à bacia de atração do ciclo atrator composto pelas duas configurações que apresentam estados das células alternados: 12 configurações a dois instantes do ciclo, 6 configurações a um instante do ciclo e as duas configurações do ciclo atrator.

Consideremos ainda o mesmo exemplo, isto é, o Autómato Celular Elementar com seis

células cuja evolução temporal é determinada pela regra de transição local $N(\phi) = 184$, desta vez para desenhar um grafo que represente toda a dinâmica do autômato. Para começar, vamos representar cada ponto fixo do autômato por um vértice, correspondente à configuração em causa, e um lacete, marcando a transição para ela própria. Seguidamente, noutra componente conexa, os ciclos serão representados por um conjunto de vértices, um para cada configuração do ciclo, ligados por arestas, marcando a evolução temporal que vai levar cada configuração do ciclo numa outra configuração. Para simplificar, adota-se a convenção que a evolução temporal num ciclo acontece sempre no sentido dos ponteiros do relógio, não sendo assim necessário acrescentar qualquer símbolo indicando a passagem do tempo. Por fim, vamos representar as restantes configurações por vértices, ligando por arestas os vértices cujas configurações C e C' tais que $C'(T + 1) = \Phi(C(T))$. Uma vez mais conseguiremos evitar a formalização da passagem do tempo se adotarmos a convenção seguinte: no grafo, a distância de uma configuração ao atrator será proporcional ao número de instantes necessários para o sistema partir dessa configuração e chegar à primeira configuração de um atrator. Deste modo, cada atrator ocupará o centro da componente conexa respetiva e os vértices relativos às configurações pertencentes à sua bacia de atração ficarão dispostas à sua volta. Na figura seguinte é apresentado o grafo de Wuensche do Autômato Celular Elementar composto por seis células cuja evolução temporal é determinada pela regra de transição local 184. É importante salientar que, para simplificar, não foi colocada no grafo informação relativa a cada uma das configurações, ficando assim a dinâmica do autômato em causa representada qualitativamente. Neste caso, é possível reconhecer os dois pontos fixos e os sete ciclos atratores anteriormente identificados. De igual modo, a bacia de atração do ciclo de período 2 é agora representada de forma a ser possível perceber quantas as configurações do sistema que após um instante e após dois instantes chegam ao ciclo.

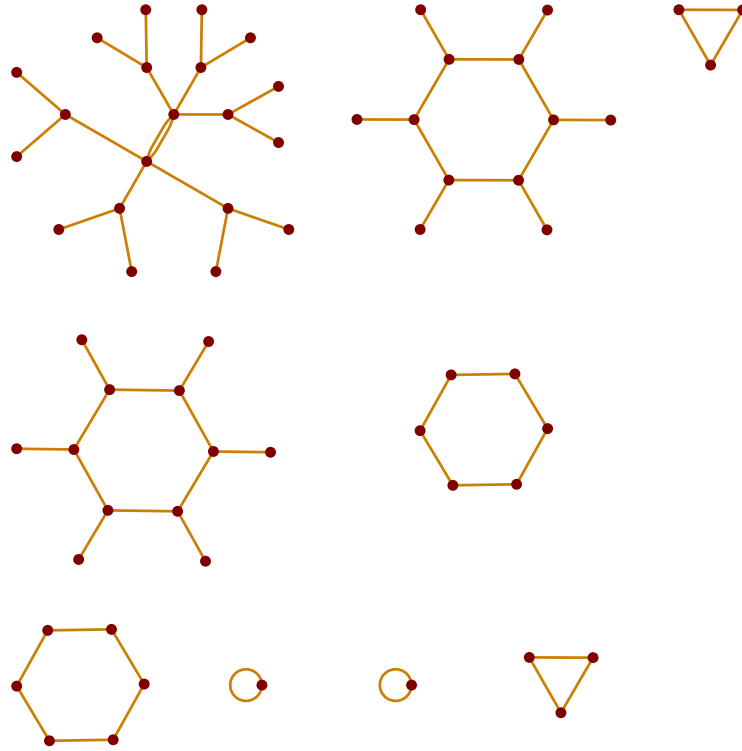


Figura 1.27: Grafo de Wuensche do Autômetro Celular Elementar $N(\phi) = 184$.

1.3.6 Equivalência de regras de transição local

Pelas suas características, facilmente se conclui que existem 256 regras distintas para os Autômetros Celulares Elementares. No entanto, como Wolfram observou, nem todas elas são dinamicamente distintas, num sentido que ainda será esclarecido.

Definição 1.6. *Seja $C = (c_i)$ uma qualquer configuração do sistema. Vamos dizer que $C' = (c'_i)$ é a configuração conjugada de C , e escrever $C' = \bar{C}$, sempre que $c'_i = \bar{c}_i$, com $\bar{0} = 1$ e $\bar{1} = 0$.*

Como podemos perceber, a conjugada de uma configuração obtém-se trocando o estado de cada uma das suas células. De seguida, vamos levar este conceito de conjugação de configurações de um sistema para autômetros.

Definição 1.7. Dados dois autómatos Φ e Φ' , vamos dizer que eles são conjugados, e escrever $\Phi' = T_c(\Phi)$, quando verificam a igualdade

$$\Phi'(\bar{C}) = \overline{\Phi(C)}, \quad (1.6)$$

para toda a configuração C .

Atente-se que esta definição é válida quer os sistemas sejam infinitos, ou finitos, e, neste último caso, também a escolha das vizinhanças da fronteira é irrelevante⁵. A definição apresentada diz-nos que, se Φ e Φ' são Autómatos Celulares Elementares conjugados, então,

$$C'(0) = \bar{C}(0) \implies C'(T) = \bar{C}(T),$$

para todo o instante $T > 0$, onde $C(T) = \Phi(C(T-1))$ e $C'(T) = \Phi'(C'(T-1))$.

Os dois resultados que vamos demonstrar justificam a razão de se dizer que autómatos conjugados têm a mesma dinâmica.

Proposição 1.1. Consideremos dois Autómatos Celulares Elementares conjugados, Φ e Φ' , e seja $\{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ um ciclo de configurações de período p para Φ . Então, $\{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_p\}$ é um ciclo de configurações de período p para Φ' .

Prova: Dada uma qualquer configuração C_n , com $n = 1, 2, \dots, p-1$, temos, por (1.6),

$$\Phi'(\bar{C}_n) = \overline{\Phi(C_n)} = \bar{C}_{n+1}.$$

De modo análogo, obtemos que $\Phi'(\bar{C}_p) = \bar{C}_1$, ficando assim demonstrado o resultado pretendido. \square

Uma vez que a relação de conjugação entre Autómatos Celulares Elementares é simétrica, o resultado anterior permite-nos afirmar que, dados Autómatos Celulares Elementares conjugados, Φ e Φ' , estes vão ter o mesmo número de ciclos e com iguais períodos. O resultado seguinte vai mostrar que Autómatos Celulares Elementares conjugados admitem as mesmas dinâmicas.

Proposição 1.2. Consideremos dois Autómatos Celulares Elementares conjugados, Φ e Φ' . Dado um qualquer ciclo de configurações, $\{C_1, \dots, C_p\}$, de período p para Φ , seja $\mathcal{B}_\Phi(\{C_1, \dots, C_p\})$ a sua bacia de atração. Então, a bacia de atração $\mathcal{B}_{\Phi'}(\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_p\})$ é dada por

$$\mathcal{B}_{\Phi'}(\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_p\}) = \overline{\mathcal{B}_\Phi(\{C_1, \dots, C_p\})}.$$

⁵Naturalmente que ambos os autómatos Φ e Φ' se referem ao mesmo sistema, apenas variando a regra de transição local.

Prova: Seja C uma qualquer configuração pertencente à bacia de atração $\mathcal{B}_\Phi(\{C_1, \dots, C_p\})$ de um ciclo $\{C_1, \dots, C_p\}$ de Φ . Então, sabemos que existe $n > 0$ tal que

$$\Phi^n(C) = C_k,$$

para algum $1 \leq k \leq p$. Desse modo, uma vez que Φ e Φ' são autómatos conjugados, temos que

$$\Phi'^n(\bar{C}) = \overline{\Phi^n(C)} = \bar{C}_k,$$

logo, podemos concluir que a configuração \bar{C} pertence à bacia de atração do ciclo $\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_p\}$ de Φ' .

Seja C uma configuração do sistema tal que \bar{C} pertence à bacia de atração $\mathcal{B}_{\Phi'}(\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_p\})$ de um ciclo $\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_p\}$ de Φ' . Então, sabemos que existe $n > 0$ tal que

$$\Phi'^n(\bar{C}) = \bar{C}_k,$$

para algum $1 \leq k \leq p$. Assim sendo, temos que

$$\Phi^n(C) = \overline{\Phi'^n(\bar{C})} = \overline{\bar{C}_k} = C_k,$$

ou seja, C pertence à bacia de atração $\mathcal{B}_\Phi(\{C_1, \dots, C_p\})$ do ciclo $\{C_1, \dots, C_p\}$ de Φ . Desta forma, provámos a igualdade das bacias de atração. \square

É este último resultado que motiva o estudo qualitativo das bacias de atração de um autómato. De facto, se desenharmos as bacias de atração de Autómatos Celulares Elementares conjugados, sem especificar as configurações, vamos obter exatamente o mesmo grafo para ambos. O resultado que vamos provar de seguida permite encontrar a representação de Wolfram do conjugado de qualquer Autómato Celular Elementar.

Proposição 1.3. *Seja Φ um Autómato Celular Elementar com representação de Wolfram $N(\Phi) = (d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_2$. Então, o Autómato Celular Elementar $\Phi' = T_c(\Phi)$ conjugado de Φ tem representação de Wolfram $N(\Phi') = (\bar{d}_0 \bar{d}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3 \bar{d}_4 \bar{d}_5 \bar{d}_6 \bar{d}_7)_2$.*

Prova: A igualdade entre configurações (2.5) que surge na definição de autómatos conjugados resume um conjunto de igualdades componente-a-componente, isto é,

$$\Phi'(\bar{C})_i = \overline{\Phi(C)_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Desenvolvendo ambos os lados desta igualdade, temos que

$$\phi'(\bar{c}_{i-1}, \bar{c}_i, \bar{c}_{i+1}) = \overline{\phi(c_{i-1}, c_i, c_{i+1})}.$$

Então, obtemos imediatamente as seguintes igualdades:

$$d'_7 = \phi'(1, 1, 1) = \phi'(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) = \overline{\phi(0, 0, 0)} = \bar{d}_0$$

$$d'_6 = \phi'(1, 1, 0) = \phi'(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) = \overline{\phi(0, 0, 1)} = \bar{d}_1$$

$$d'_5 = \phi'(1, 0, 1) = \phi'(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}) = \overline{\phi(0, 1, 0)} = \bar{d}_2$$

$$d'_4 = \phi'(1, 0, 0) = \phi'(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}) = \overline{\phi(0, 1, 1)} = \bar{d}_3$$

$$d'_3 = \phi'(0, 1, 1) = \phi'(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}) = \overline{\phi(1, 0, 0)} = \bar{d}_4$$

$$d'_2 = \phi'(0, 1, 0) = \phi'(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}) = \overline{\phi(1, 0, 1)} = \bar{d}_5$$

$$d'_1 = \phi'(0, 0, 1) = \phi'(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}) = \overline{\phi(1, 1, 0)} = \bar{d}_6$$

$$d'_0 = \phi'(0, 0, 0) = \phi'(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = \overline{\phi(1, 1, 1)} = \bar{d}_7$$

ficando assim provado o resultado pretendido. \square

Ilustremos com um exemplo todos estes conceitos e resultados.

Consideremos o Autômato Celular Elementar com representação de Wolfram igual a 74. Ora, uma vez que $74 = (01001010)_2$, obtemos a seguinte representação gráfica da regra de transição local:

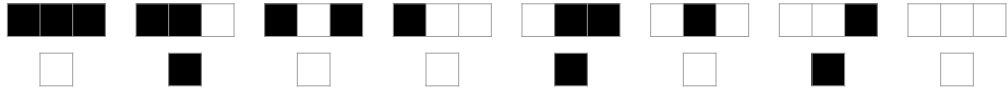


Figura 1.28: Representação gráfica da regra de transição local $N(\phi) = 74$.

Pelo resultado anteriormente obtido, sabemos que para encontrar o Autômato Celular Elementar conjugado deste basta efetuar uma transformação de conjugação, troca dos estados, simultaneamente nas vizinhanças e nas respostas. Assim sendo, obtemos a seguinte representação gráfica da nova regra de transição local:



Figura 1.29: Representação gráfica, com as vizinhanças fora da sua ordem habitual, da regra de transição local conjugada de $N(\phi) = 74$.

Estando interessados na representação de Wolfram da regra de transição local obtida, sabemos que devemos reordenar as vizinhanças, ficando assim com:

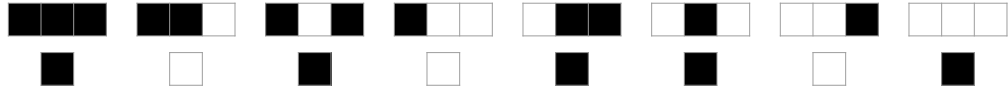


Figura 1.30: Representação gráfica da regra de transição local conjugada de $N(\phi) = 74$.

A partir desta representação gráfica facilmente se identifica a representação de Wolfram do Autômato Celular Elementar em causa, isto é, $(10101101)_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 = 173$.

Identificado o autômato conjugado da regra 74, vamos, de seguida, ilustrar a ideia de equivalência das suas dinâmicas: na figura que se segue, apresenta-se à esquerda o diagrama espaço-tempo da regra $N(\phi) = 74$ de um sistema com doze células, a partir de uma configuração inicial arbitrariamente escolhida, enquanto à direita se apresenta o diagrama espaço-tempo da regra $N(\phi) = 173$ de um sistema a partir de uma configuração inicial conjugada da anterior.

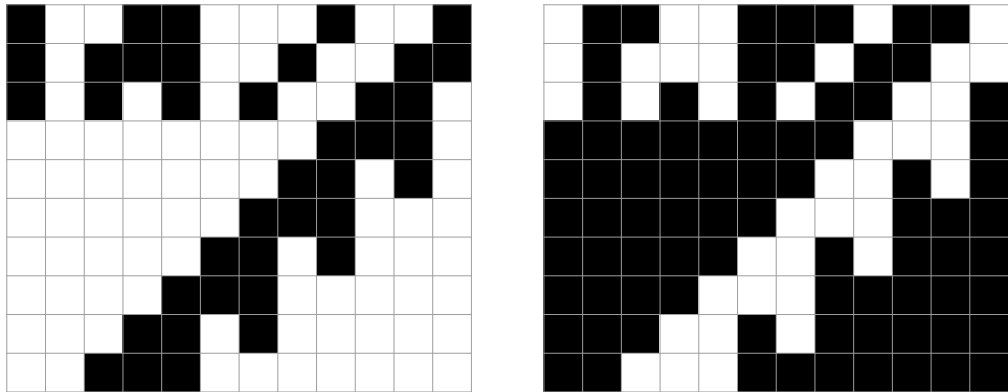


Figura 1.31: Diagramas espaço-temporais das regras conjugadas $N(\phi) = 74$ e $N(\phi) = 173$, à esquerda e à direita, respetivamente, para sistemas com doze células, partindo de configurações iniciais conjugadas.

Aquilo que se observa, comparando os dois diagramas, corresponde exatamente ao descrito anteriormente: que autômatos conjugados preservam a simetria de conjugação de configurações iniciais. Finalmente, se desenharmos os grafos de Wuensche para ambas as regras, tal como há pouco, para sistemas com apenas seis células, verifica-se que os resultados obtidos, na sua versão qualitativa, são exatamente iguais.

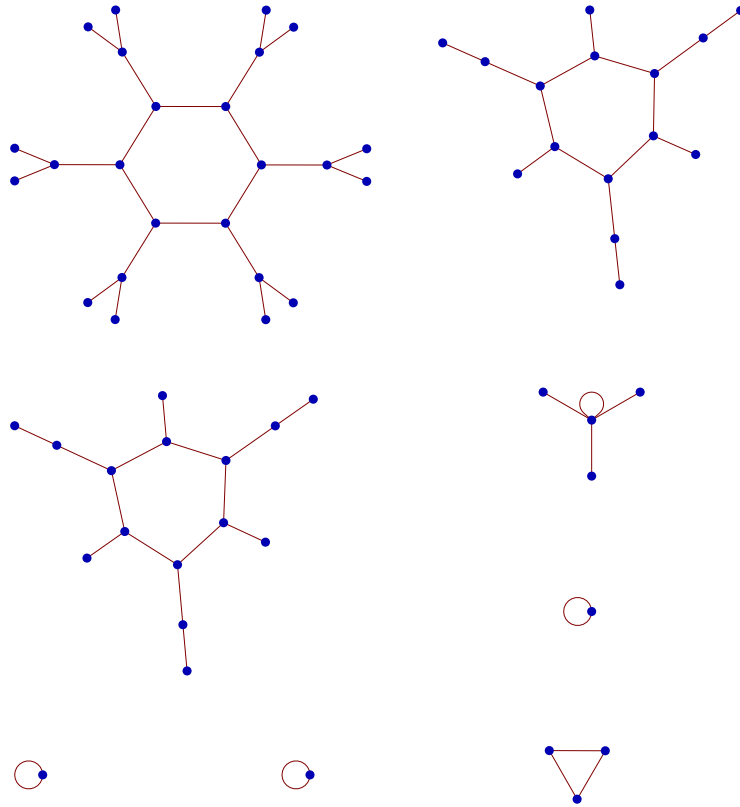


Figura 1.32: Grafo qualitativo de Wuensche das regras de transição local $N(\phi) = 74$ e $N(\phi) = 173$, para sistemas com seis células.

Esta simetria por conjugação não é a única que se pode definir numa configuração de células dispostas ao longo de uma linha. Existe uma transformação típica de sistemas numa linha que é a simetria especular, ou seja, aquela que resulta de uma dada por inversão espacial, esquerda-direita, da disposição das células do sistema.

Definição 1.8. *Seja C uma qualquer configuração para o sistema. Então, vamos dizer que C' é a configuração que se obtém de C por uma transformação esquerda-direita, e escrever $C' = \overleftarrow{C}$, sempre que*

$$C' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_{N-1}, c'_N) = (c_N, c_{N-1}, \dots, c_2, c_1),$$

para o caso de sistemas com um número finito N de células, e sempre que

$$C' = (\dots, c'_{-2}, c'_{-1}, c_0, c'_1, c'_2, \dots) = (\dots, c_2, c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots),$$

caso o sistema tenha um número infinito de elementos.

De forma análoga ao efetuado antes para a conjugação, vamos definir agora uma transformação entre autómatos correspondente a esta simetria entre configurações.

Definição 1.9. *Dados Autómatos Celulares Elementares Φ e Φ' , dizemos que Φ' é o transformado esquerda-direita de Φ , e escrevemos $\Phi' = T_{ed}(\Phi)$, se e somente se*

$$\Phi'(\overleftarrow{C}) = \overleftarrow{\Phi(C)}, \quad (1.7)$$

para toda a configuração C do sistema.

Tal como observámos anteriormente, também esta relação entre autómatos vai conservar uma relação inicial entre configurações: se Φ e Φ' são Autómatos Celulares Elementares tais que $\Phi' = T_{ed}(\Phi)$, então,

$$C'(0) = \overleftarrow{C}(0) \implies C'(T) = \overleftarrow{C}(T),$$

para todo o instante $T > 0$, com $C(T) = \Phi(C(T-1))$ e $C'(T) = \Phi'(C'(T-1))$.

Tal como para a transformação por conjugação, também agora para a transformação esquerda-direita vamos ter resultados que afirmam a equivalências das dinâmicas de autómatos relacionados. Uma vez que as provas são basicamente do mesmo tipo, desta vez são omitidas.

Proposição 1.4. *Consideremos dois Autómatos Celulares Elementares transformados esquerda-direita, Φ e Φ' , e seja $\{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ um ciclo de configurações de período p para Φ . Então, $\{\overleftarrow{C}_1, \overleftarrow{C}_2, \dots, \overleftarrow{C}_p\}$ é um ciclo de configurações de período p para Φ' .*

Proposição 1.5. *Consideremos dois Autómatos Celulares Elementares transformados esquerda-direita, Φ e Φ' . Dado um qualquer ciclo de configurações, $\{C_1, \dots, C_p\}$, de período p para Φ , seja $\mathcal{B}_\Phi(\{C_1, \dots, C_p\})$ a sua bacia de atração. Então, a bacia de atração $\mathcal{B}_{\Phi'}(\{\overleftarrow{C}_1, \dots, \overleftarrow{C}_p\})$ é dada por*

$$\mathcal{B}_{\Phi'}(\{\overleftarrow{C}_1, \dots, \overleftarrow{C}_p\}) = \overleftarrow{\mathcal{B}_\Phi(\{C_1, \dots, C_p\})}.$$

Estabelecida a equivalência das dinâmicas de Autómatos Celulares Elementares relacionados por uma transformação esquerda-direita, vamos então obter a representação de Wolfram da regra transformada.

Proposição 1.6. *Seja Φ um Autómatos Celular Elementar com representação de Wolfram $N(\Phi) = (d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_2$. Então, o Autómatos Celular Elementar $\Phi' = T_{ed}(\Phi)$, obtido de Φ por uma transformação esquerda-direita, tem representação de Wolfram $N(\Phi') = (d_7 d_3 d_5 d_1 d_6 d_2 d_4 d_0)_2$.*

Prova: Olhando para a igualdade (1.7) componente-a-componente,

$$\Phi'(\overleftarrow{C})_i = \overleftarrow{\Phi(C)}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

e desenvolvendo ambos os seus membros, obtemos que

$$\phi'(T_{ed}(C)_{i-1}, T_{ed}(C)_i, T_{ed}(C)_{i+1}) = \phi'(C_{n+2-i}, C_{n+1-i}, C_{n-i})$$

$$T_{ed}(\Phi(C)) = \Phi(C)_{n+1-i} = \phi(C_{n-i}, C_{n+1-i}, C_{n+2-i})$$

isto é, se Φ' e Φ são Autómatos Celulares Elementares relacionados por uma transformação esquerda-direita, então, qualquer que seja a configuração C do sistema, são válidas as igualdades

$$\phi'(C_{n+2-i}, C_{n+1-i}, C_{n-i}) = \phi(C_{n-i}, C_{n+1-i}, C_{n+2-i}).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} d'_7 &= \phi'(1, 1, 1) = \phi(1, 1, 1) = d_7 & d'_6 &= \phi'(1, 1, 0) = \phi(0, 1, 1) = d_3 \\ d'_5 &= \phi'(1, 0, 1) = \phi(1, 0, 1) = d_5 & d'_4 &= \phi'(1, 0, 0) = \phi(0, 0, 1) = d_1 \\ d'_3 &= \phi'(0, 1, 1) = \phi(1, 1, 0) = d_6 & d'_2 &= \phi'(0, 1, 0) = \phi(0, 1, 0) = d_2 \\ d'_1 &= \phi'(0, 0, 1) = \phi(1, 0, 0) = d_4 & d'_0 &= \phi'(0, 0, 0) = \phi(0, 0, 0) = d_0 \end{aligned}$$

ficando assim provado o resultado pretendido. \square

Para ilustrar estas definições e resultados, vamos uma vez mais considerar a regra de transição local obtida por uma transformação esquerda-direita da regra $N(\phi) = 74$. Voltemos a olhar a representação gráfica da regra de transição local $N(\phi) = 74$:

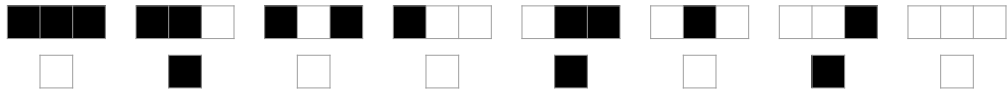


Figura 1.33: Representação gráfica da regra de transição local $N(\phi) = 74$.

A partir da definição de regra transformada esquerda-direita, fazemos a transformação esquerda-direita em todas as vizinhanças, conservando as respostas:

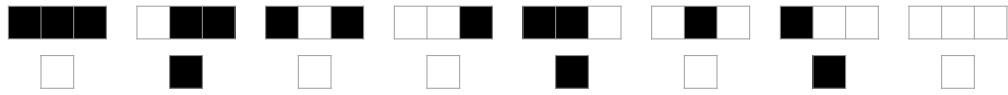


Figura 1.34: Representação gráfica, com as vizinhanças por outra ordem, da regra de transição local obtida de $N(\phi) = 74$ por uma transformação esquerda-direita.

Se escrevermos agora as vizinhanças pela ordem anteriormente fixada, obtemos a seguinte representação gráfica da nova regra de transição local:

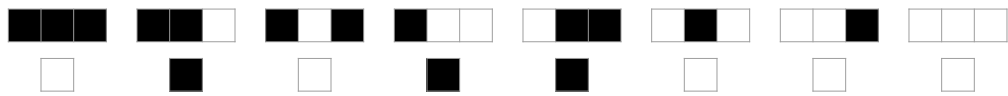


Figura 1.35: Representação gráfica da regra de transição local obtida de $N(\phi) = 74$ por uma transformação esquerda-direita.

Por fim, olhando para o conjunto das respostas como código binário, facilmente obtemos a representação de Wolfram da nova regra de transição local: $(01011000)_2 = 2^6 + 2^4 + 2^3 = 88$.

Comparemos então agora os diagramas espaço-temporais das regras $N(\phi) = 74$ e $N(\phi) = 88$, a partir de configurações iniciais relacionadas por uma transformação esquerda-direita.

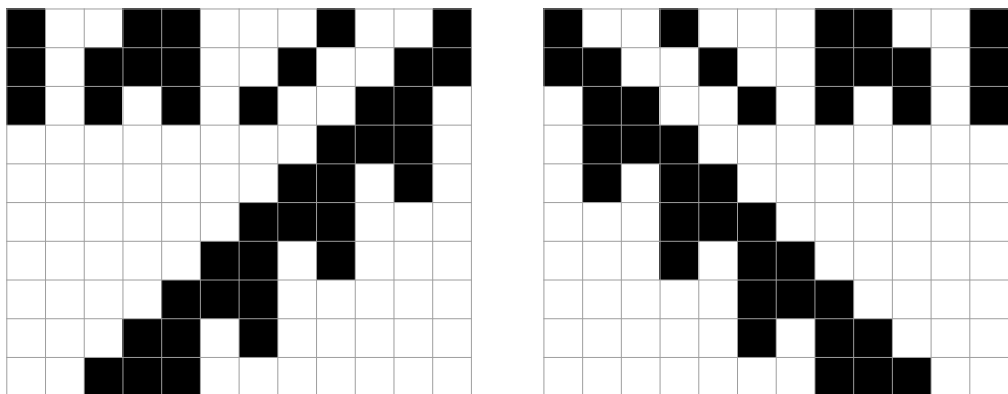


Figura 1.36: Diagramas espaço-temporais das regras $N(\phi) = 74$ e $N(\phi) = 88$, à esquerda e à direita, respetivamente, para sistemas com doze células, a partir de configurações iniciais relacionadas por uma transformação esquerda-direita.

Como era de esperar, estamos perante dois diagramas espaço-temporais que exibem uma simetria especular, reveladores de dinâmicas qualitativamente equivalentes.

Tendo descrito as duas operações de simetria que resulta em dinâmicas equivalentes, podemos ainda construir uma terceira transformação através da sua composição. Voltemos de novo ao Autómato Celular Elementar com representação de Wolfram $N(\phi) = 74$. Como vimos anteriormente, a regra de transição local que se obtém desta por uma transformação por conjugação tem representação de Wolfram $N(\phi) = 173$. Assim sendo, vamos fazer a transformação esquerda-direita à regra $N(\phi) = 173$, obtendo deste modo o simétrico do conjugado da regra $N(\phi) = 74$. Recordando a representação gráfica da regra $N(\phi) = 173$, ver Figura 1.30, comecemos por obter as vizinhanças transformadas pela simetria esquerda-direita:

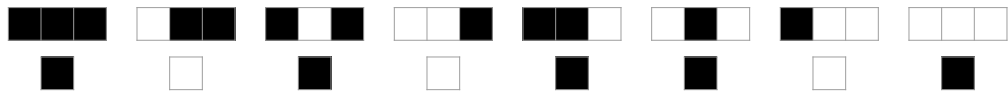


Figura 1.37: Representação gráfica, com as vizinhanças por outra ordem, da regra de transição local obtida de $N(\phi) = 173$ por uma transformação esquerda-direita.

Reordenando as vizinhanças, obtemos

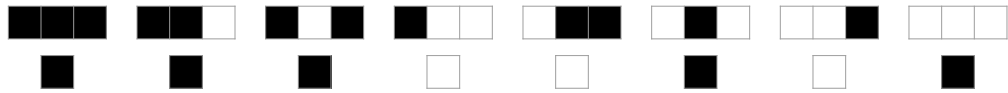


Figura 1.38: Representação gráfica da regra de transição local obtida de $N(\phi) = 173$ por uma transformação esquerda-direita.

donde, a representação de Wolfram desta regra de transição local é dada por $(11100101)_2 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^0 = 229$.

Deste modo, escolhidas configurações iniciais transformadas pela composição de uma conjugação seguida de uma transformação esquerda-direita, obtemos os seguintes diagramas espaço-temporais para as regras de transição local $N(\phi) = 74$ e $N(\phi) = 229$.

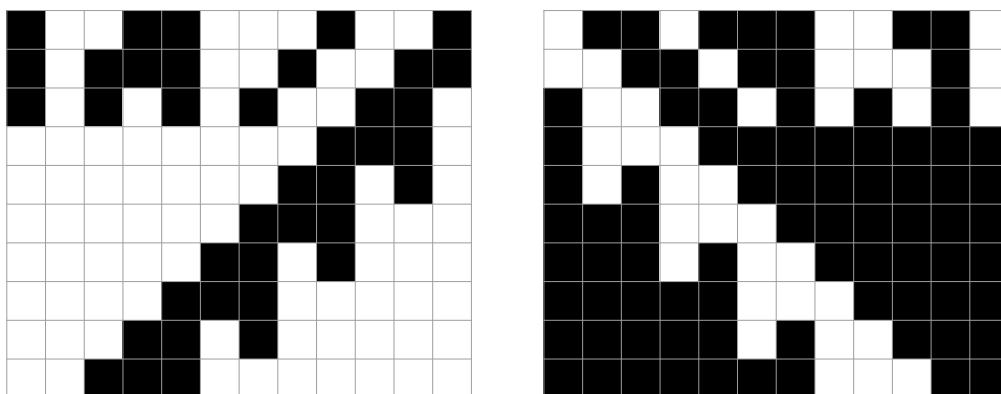


Figura 1.39: Diagramas espaço-temporais das regras $N(\phi) = 74$ e $N(\phi) = 229$, à esquerda e à direita, respectivamente, para sistemas com doze células, a partir de configurações iniciais relacionadas pela composição de uma transformação de conjugação seguida de uma transformação esquerda-direita.

Uma vez mais é notória a simetria dos dois diagramas espaço-temporais, revelador da equivalência das dinâmicas.

Resumindo, chegámos à conclusão que os Autómatos Celulares Elementares com representação de Wolfram $N(\phi) = 74$, $N(\phi) = 88$, $N(\phi) = 173$ e $N(\phi) = 229$ são dinamicamente equivalentes. Na tabela seguinte apresentamos os autómatos equivalentes por conjugação, por uma transformação esquerda-direita e pela composição das duas, para todos os Autómatos Celulares Elementares. Dessa listagem é possível concluir que existem apenas 88 Autómatos Celulares Elementares não equivalentes.

$N(\phi)$	$N(T_c(\phi))$	$N(T_{ed}(\phi))$	$N(T_{ed}(T_c(\phi)))$
0	0	255	255
1	1	127	127
2	16	191	247
3	17	63	119
4	4	223	223
5	5	95	95
6	20	159	215
7	21	31	87
8	64	239	253
9	65	111	125
10	80	175	245
11	47	81	117
12	68	207	221
13	69	79	93
14	84	143	213
15	15	85	85
18	18	183	183
19	19	55	55
22	22	151	151
23	23	23	23
24	66	189	231
25	61	67	103
26	82	167	181
27	39	53	83
28	70	157	199
29	29	71	71
30	86	135	149
32	32	251	251
33	33	123	123
34	48	187	243
35	49	59	115
36	36	219	219
37	37	91	91
38	52	155	211
40	96	235	249

$N(\phi)$	$N(T_c(\phi))$	$N(T_{ed}(\phi))$	$N(T_{ed}(T_c(\phi)))$
41	97	107	121
42	112	171	241
43	43	113	113
44	100	203	217
45	75	89	101
46	116	139	209
50	50	179	179
51	51	51	51
54	54	147	147
56	98	185	227
57	57	99	99
58	114	163	177
60	102	153	195
62	118	131	145
72	72	237	237
73	73	109	109
74	88	173	229
76	76	205	205
77	77	77	77
78	92	141	197
90	90	165	165
94	94	133	133
104	104	233	233
105	105	105	105
106	120	169	225
108	108	201	201
110	124	137	193
122	122	161	161
126	126	129	129
128	128	254	254
130	144	190	246
132	132	222	222
134	148	158	214
136	192	238	252
138	174	208	244
140	196	206	220

$N(\phi)$	$N(T_c(\phi))$	$N(T_{ed}(\phi))$	$N(T_{ed}(T_c(\phi)))$
142	142	212	212
146	146	182	182
150	150	150	150
152	188	194	230
154	166	180	210
156	156	198	198
160	160	250	250
162	176	186	242
164	164	218	218
168	224	234	248
170	170	240	240
172	202	216	228
178	178	178	178
184	184	226	226
200	200	236	236
204	204	204	204
232	232	232	232

De seguida vamos estudar algumas características comuns a alguns Autómatos Celulares Elementares, identificadas por Wolfram.

1.3.7 As quatro classes de complexidade segundo Wolfram

A evolução temporal de um autómato celular pode apresentar comportamentos mais ou menos variados, dependendo da regra utilizada para executar essa evolução. Existem regras que levam ao estado homogéneo, onde todos as células assumem o mesmo valor, enquanto outras, por exemplo, podem gerar *padrões caóticos*. Apesar da variedade de comportamentos exibidos pelos Autómatos Celulares Elementares, Wolfram percebeu que estes autómatos mostravam dinâmicas com características comuns: a classificação proposta por Wolfram é essencialmente qualitativa, baseada no aspeto do diagrama espaço-tempo gerado. Ele sugeriu que o comportamento dinâmico observado em autómatos celulares divide-se em quatro classes, de complexidade crescente.

Classe I: pertencem a esta classe aqueles autómatos cuja evolução temporal leva o sistema, para quase todas as escolhas iniciais, a um ponto fixo que é uma configuração homogênea, configuração com todas as células com um mesmo estado.

Na figura seguinte ilustramos este tipo de comportamento mostrando o diagrama espaço-tempo para um sistema composto por 40 células, cuja dinâmica é determinada pela regra de transição local $N(\phi) = 40$.

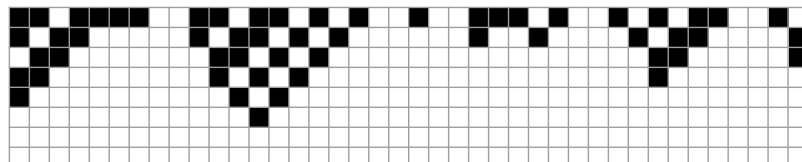


Figura 1.40: Diagrama espaço-tempo típico de um autômato pertencente à Classe I de Wolfram, neste caso a regra de transição local $N(\phi) = 40$.

Classe II: pertencem a esta classe os autómatos cuja evolução no tempo leva o sistema a percorrer um ponto fixo ou um ciclo de configurações de período não muito elevado, logo após um transiente curto.

Na figura seguinte ilustramos este tipo de comportamento mostrando o diagrama espaço-tempo para um sistema composto por 40 células, cuja dinâmica é determinada pela regra de transição local $N(\phi) = 77$.

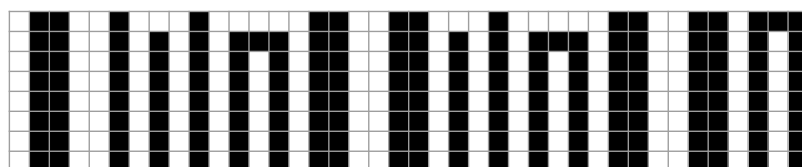


Figura 1.41: Diagrama espaço-tempo típico de um autômato pertencente à Classe II de Wolfram, neste caso a regra de transição local $N(\phi) = 77$.

Classe III: pertencem a esta classe os autómatos cuja evolução no tempo leva o sistema a percorrer configurações sem qualquer padrão reconhecível.

Na figura seguinte ilustramos este tipo de comportamento mostrando o diagrama espaço-tempo para um sistema composto por 40 células, cuja dinâmica é determinada pela regra de transição local $N(\phi) = 90$.

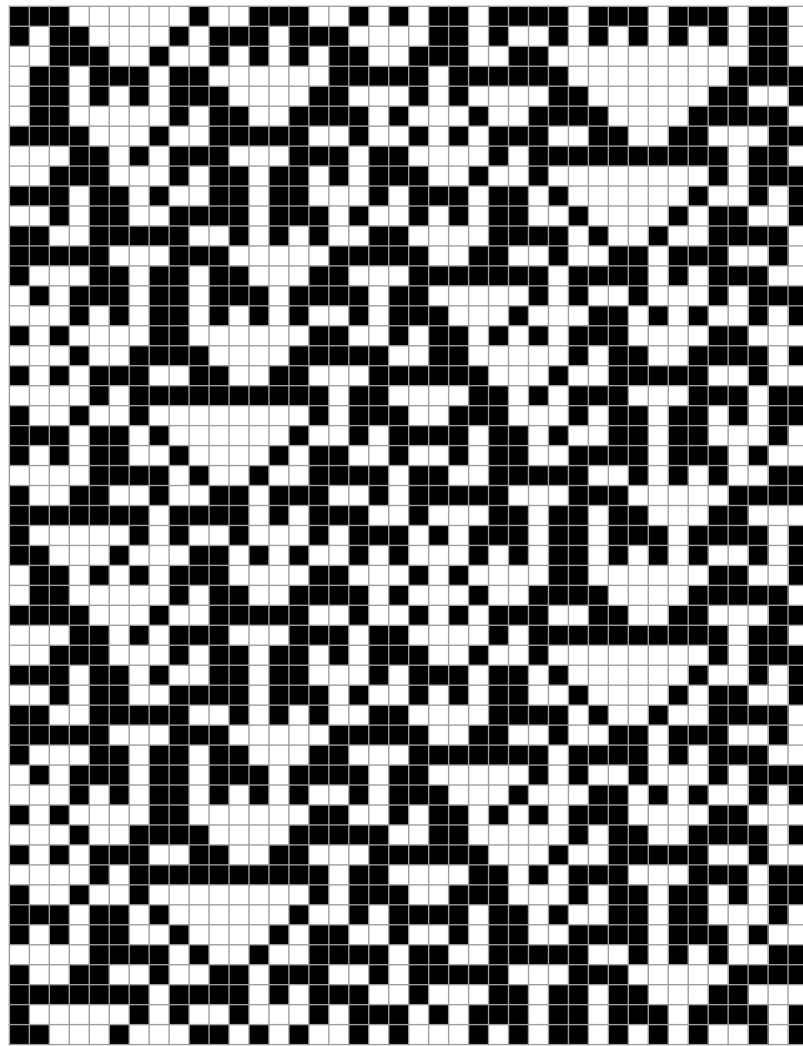


Figura 1.42: Diagrama espaço-tempo típico de um autômato pertencente à Classe III de Wolfram, neste caso a regra de transição local $N(\phi) = 90$.

Classe IV: pertencem a esta classe os autômatos cuja evolução temporal leva o sistema a percorrer configurações que geram estruturas complexas, de modo algum previsíveis, que se podem propagar, criar e/ou aniquilar outras estruturas. Essa evolução complexa pode ocorrer após transientes relativamente longos.

Os autômatos celulares pertencentes a esta classe exibem diagramas espaço-tempo que não são nem regulares, nem periódicos, mas, localmente e apenas durante algumas gerações, essas configurações podem apresentar padrões característicos dos autômatos pertencentes à Classes II e à classe III de Wolfram. Na figura seguinte ilustramos este tipo de comportamento mostrando o diagrama espaço-tempo para um sistema composto por 100 células, cuja dinâmica é determinada pela regra de transição local $N(\phi) = 54$.

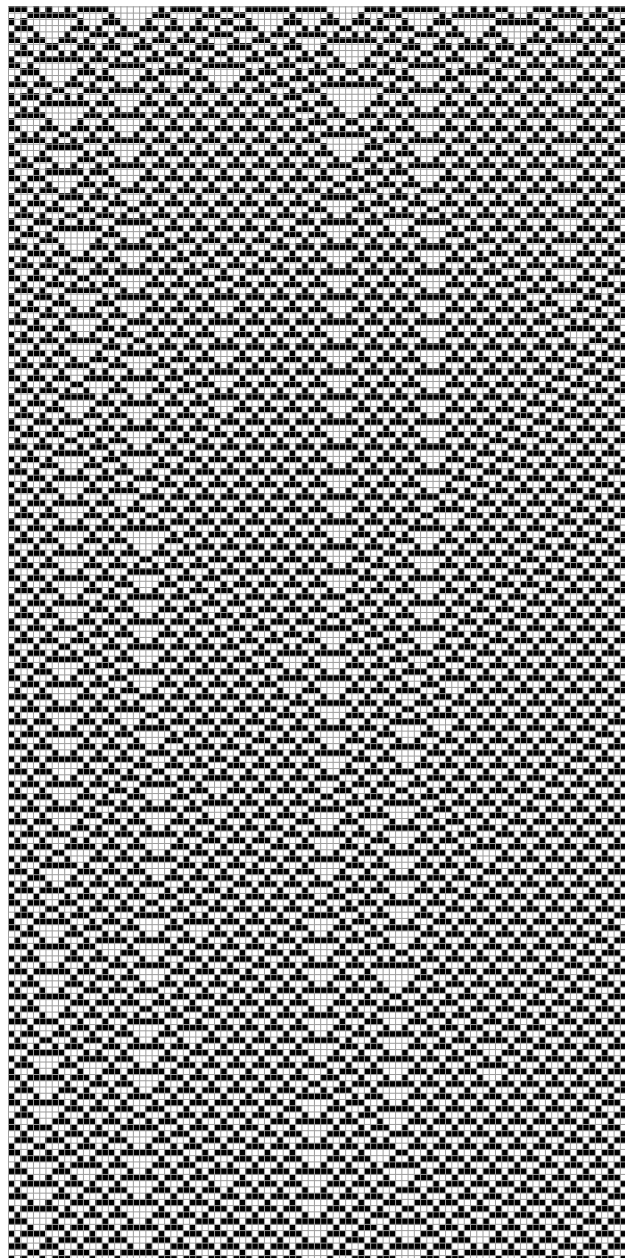


Figura 1.43: Diagrama espaço-tempo típico de um autómato pertencente à Classe IV de Wolfram, neste caso a regra de transição local $N(\phi) = 54$.

Esta classificação dos Autómatos Celulares Elementares mostrou-se muito fecunda, no sentido em que também conseguiu distinguir as dinâmicas de outras famílias de autómatos, quer unidimensionais, quer no plano. Este facto, à partida muito pouco espectável, indica, segundo Wolfram, a universalidade do comportamento do autómato celular, na medida em que muitas das características das dinâmicas não dependem de detalhes da sua definição, como sejam a dimensão da rede, o tipo de vizinhança ou o número de elementos do conjunto dos estados que cada célula pode assumir.

Nas tabelas seguintes é apresentada a distribuição dos 256 Autómatos Celulares Elementares pelas quatro classes de Wolfram. Como era de esperar, atendendo à enorme simplicidade das regras de transição que determina a dinâmica destes sistemas, grande parte dos Autómatos Celulares Elementares, 216, pertencem às duas classes correspondentes a comportamentos extremamente ordenados.

Classe I											
0	8	32	40	64	96	128	136	160	168	192	224
234	235	238	239	248	249	250	251	252	253	254	255

Tabela 1.4: Tabela das regras de transição local $N(\phi)$ pertencentes à Classe I de Wolfram.

Classe II											
1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13
14	15	16	17	19	20	21	23	24	25	26	27
28	29	31	33	34	35	36	37	38	38	41	42
43	44	46	47	48	49	50	51	52	53	55	56
57	58	59	61	62	63	65	66	67	68	69	70
71	72	74	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	87	88	91	92	93	94	95	97	98	99	100
103	104	107	108	111	112	113	114	115	116	117	118
119	121	123	125	127	130	131	132	133	134	138	139
140	141	142	143	144	145	148	152	154	155	156	157
158	159	162	163	164	166	167	170	171	172	173	174
175	176	177	178	179	180	181	184	185	186	187	188
190	191	194	196	197	198	199	200	201	202	203	204
205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216
217	218	219	220	221	222	223	226	227	228	229	230
231	232	233	236	237	240	241	242	243	244	245	246

Tabela 1.5: Tabela das regras de transição local $N(\phi)$ pertencentes à Classe II de Wolfram.

Muito menos numerosa, apenas 31 regras, é a classe correspondente a comportamentos onde não se distingue qualquer padrão, os por vezes chamados autómatos de comportamento caótico.

Classe III											
18	22	30	45	60	73	75	86	89	90	101	102
105	106	109	120	122	126	129	135	146	149	150	151
153	161	165	182	183	195	225					

Tabela 1.6: Tabela das regras de transição local $N(\phi)$ pertencentes à Classe III de Wolfram.

Por fim, a classe dos autómatos que exibem comportamentos complexos é a que menos elementos tem, apenas seis regras, das quais apenas duas são não equivalentes. Como é óbvio, esta raridade corresponde à dificuldade de um sistema, governado por regras simples, em exibir dinâmicas extremamente complexas.

Classe IV					
54	110	124	137	147	193

Tabela 1.7: Tabela das regras de transição local $N(\phi)$ pertencentes à Classe IV de Wolfram.

De seguida vamos introduzir uma medida de complexidade que tem servido para caracterizar os diferentes níveis de complexidade apresentados pelas regras pertencentes às diferentes classes de Wolfram.

1.4 Distância de Hamming como medida da complexidade de um autómato

Para estudar a estabilidade de um Autómato Celular Elementar a pequenas perturbações, é habitual utilizar uma técnica que consiste na comparação entre a evolução de um sistema e de uma sua réplica, na qual foi feita uma *pequena* perturbação na configuração inicial do sistema original, isto é, vamos comparar as dinâmicas de um sistema e de um outro exatamente igual ao primeiro, no número de células e regra de transição local, exceto que a configuração inicial do segundo resulta da configuração inicial original após ter sido modificado o estado de algumas, não muitas, células do sistema. A comparação entre as

duas dinâmicas vai ser feita, em cada instante, usando uma distância entre configurações que passamos a apresentar.

Definição 1.10. Dado um sistema composto por N células, sejam $C = (c_i)$ e $C' = (c'_i)$ duas suas configurações. Vamos chamar distância de Hamming normalizada entre as configurações $C = (c_i)$ e $C' = (c'_i)$ a

$$d_H(C, C') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - \delta_{c_i c'_i}), \quad (1.8)$$

onde por δ_{xy} se denota o símbolo delta de Kronecker.

Esta definição, aqui apresentada para o caso particular dos Autômatos Celulares Elementares, é facilmente generalizada para todos os autômatos, uma vez que está apenas em causa uma comparação dos estados de células correspondentes, para todas as células do sistema.

Vejamos através de exemplos, como podemos aplicar a distância de Hamming para comparar as configurações assumidas por um sistema ao longo do tempo, partindo de configurações iniciais distintas. Consideremos a seguinte configuração para um sistema composto por 20 células:



Figura 1.44: Configuração de um sistema composto por 20 células.

Alteremos, agora, o estado de uma célula, neste caso, o estado da quarta célula.



Figura 1.45: Configuração obtida da anterior pela modificação do estado da célula que se encontra na quarta posição.

A ideia fundamental do estudo da estabilidade dos autômatos passa então por contar o número de células de ambos os sistemas que diferem ao longo do tempo, quando ambos os sistemas evoluem a partir das configurações iniciais apresentadas na Figura 1.44 e na Figura 1.45. De certa forma vamos dizer que a sua complexidade está relacionada com a forma como o sistema vai lidar com a perturbação introduzida na configuração inicial. Começemos por observar o que se passa para a regra de transição $N(\phi) = 96$, pertencente

à Classe I. Nas figuras seguintes apresentamos a evolução temporal de ambos os sistemas, a partir de cada uma das configurações iniciais acima descritas, Figura 1.44 e Figura 1.45, respectivamente, para 7 instantes de tempo:

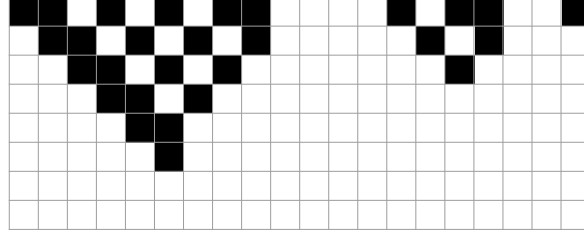


Figura 1.46: Diagrama espaço-tempo relativo à regra de transição $N(\phi) = 96$, a partir da configuração apresentada na Figura 1.44.

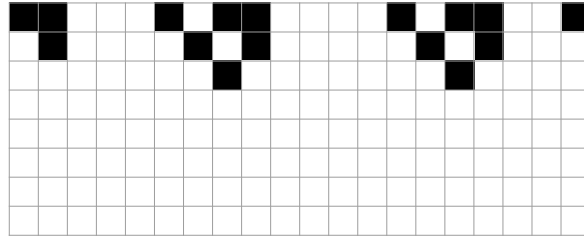


Figura 1.47: Diagrama espaço-tempo relativo à regra de transição $N(\phi) = 96$, a partir da configuração apresentada na Figura 1.45.

Comparando ambos os gráficos espaço-temporais, podemos dar conta das células que apresentam estados distintos. Na figura seguinte assinalamos essas células a cinzento:

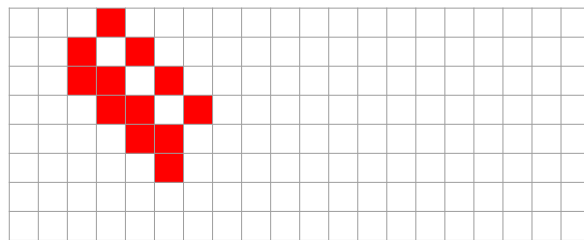


Figura 1.48: Comparação entre os diagramas espaço-tempo mostrados nas duas figuras anteriores, onde se assinalam as células que em cada instante têm estados diferentes.

Comparando ambos os sistemas, facilmente se constata que o número de células com estados distintos nas configurações assumidas pelos dois sistemas em cada instante evolui rapidamente para zero. Deste modo, podemos dizer que a variação com o tempo da distância de Hamming normalizada entre as configurações que os sistemas assumem em cada instante, $d_H(C(T), C'(T))$, tende para zero à medida que o tempo cresce. Este comportamento

da distância de Hamming normalizada é típico das regras pertencentes a esta classe de autómatos, pelo que podemos escrever o seguinte:

Classe I – Para os autómatos pertencentes a esta classe, verifica-se que a distância de Hamming normalizada entre sistemas partindo de configurações ligeiramente diferentes tende para zero com o passar do tempo; estamos assim perante sistemas que não mostram qualquer sensibilidade a variações da configuração inicial. Por outras palavras, independentemente das condições iniciais, o sistema evolui rapidamente para a mesma configuração homogénea ou ciclo composto por ambas as configurações homogéneas.

Consideremos agora a regra de transição $N(\phi) = 88$, uma regra pertencente à Classe II de Wolfram, e voltemos às duas configurações iniciais representadas na Figura 1.44 e na Figura 1.45. Nas duas figuras seguintes apresentamos os diagramas espaço-tempo respetivos.

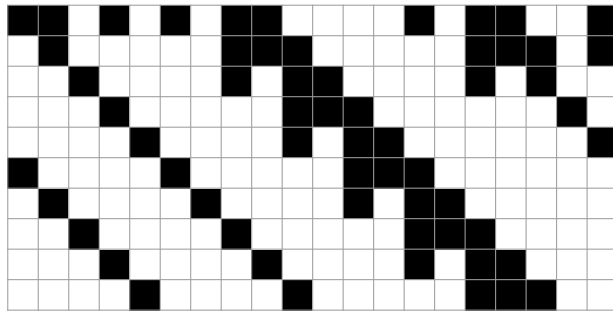


Figura 1.49: Diagrama espaço-tempo da regra de transição $N(\phi) = 88$, a partir da configuração anteriormente apresentada na Figura 1.44.

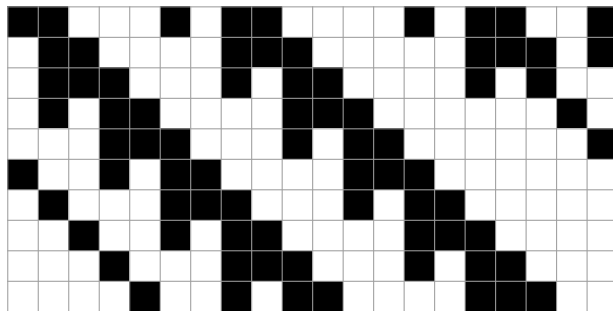


Figura 1.50: Diagrama espaço-tempo da regra de transição $N(\phi) = 88$, a partir da configuração anteriormente apresentada na Figura 1.45.

Para facilitar a comparação entre as dinâmicas obtidas, na figura que se segue destacamos as células do sistema que, em cada instante, apresentam estados distintos.

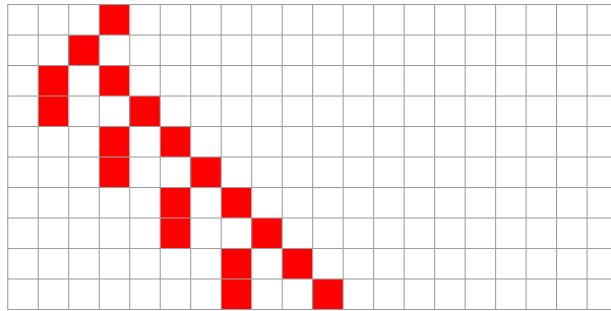


Figura 1.51: Comparação entre os diagramas espaço-tempo, relativos à regra de transição $N(\phi) = 88$, mostrados nas duas figuras anteriores, onde se assinalam as células que em cada instante têm estados diferentes.

A partir deste gráfico podemos concluir que o número de células que em cada instante assume estados diferentes em ambas as dinâmicas se vai fixar, após alguns instantes apenas, não em zero, mas num número bastante pequeno, neste caso dois. Esta variação da distância de Hamming normalizada é típico de autómatos pertencentes a esta segunda classe.

Classe II – Para os autómatos pertencentes a esta classe, verifica-se que a distância de Hamming normalizada entre sistemas partindo de configurações ligeiramente diferentes pode ser diferente de zero, mas tomando sempre valores muito pequenos; por outras palavras, muita da informação relativa às condições iniciais é retida por este tipo de sistema, mesmo passado algum tempo.

Consideremos agora a regra de transição $N(\phi) = 45$, um autómato pertencente à Classe III de Wolfram. Ainda relativamente às duas configurações apresentadas na Figura 1.44 e Figura 1.45, são os seguintes os respetivos diagramas espaço-tempo, desta vez para 24 instantes de tempo.

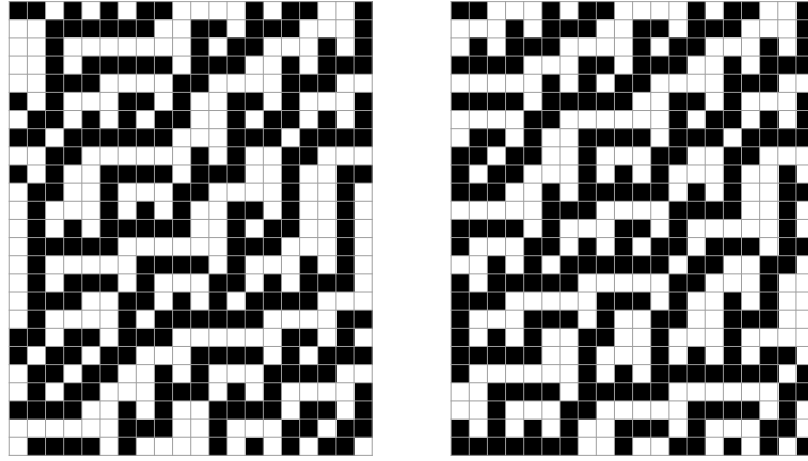


Figura 1.52: Diagramas espaço-tempo da regra de transição $N(\phi) = 45$, a partir das configurações anteriormente apresentadas na Figura 1.44 e na Figura 1.45.

Procedendo de forma análoga, na figura seguinte apresentamos o resultado da comparação destes diagramas espaço-tempo, assinalando a cinzento aquelas células que, em cada instante, apresentam estados distintos nos dois diagramas.

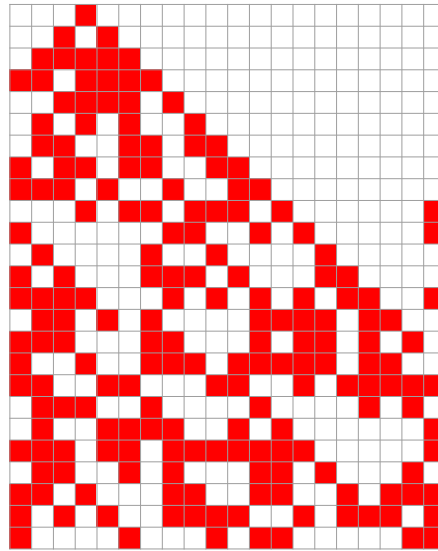


Figura 1.53: Comparação entre os diagramas espaço-tempo relativos à regra de transição $N(\phi) = 45$, mostrados nas duas figuras anteriores, onde se assinalam as células que em cada instante têm estados diferentes.

A partir deste gráfico facilmente se percebe que algo muito diferente se passa: de facto, o número de células com estados diferentes em cada instante vai crescer bastante, atingindo valores da ordem de grandeza do próprio sistema. No gráfico seguinte mostramos a variação da distância de Hamming normalizada relativamente às configurações que cada um destes

sistemas assumiram ao longo do intervalo de tempo considerado.

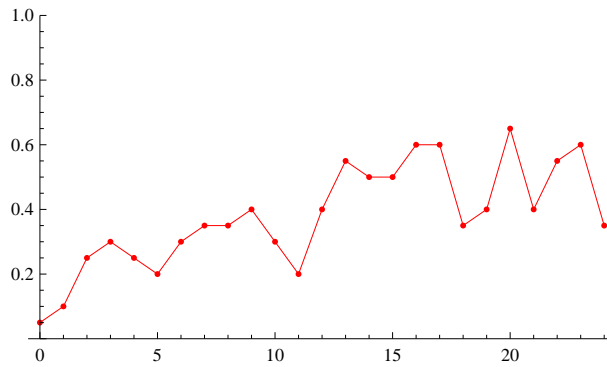


Figura 1.54: Variação da distância de Hamming normalizada relativamente aos diagramas espaço-tempo da regra de transição $N(\phi) = 45$ apresentados na Figura 1.52.

Este tipo de variação da distância de Hamming normalizada é partilhado por todas as regras de transição pertencentes a esta classe de autómatos, pelo que podemos dizer o seguinte:

Classe III – Para os autómatos pertencentes a esta classe, verifica-se que a distância de Hamming normalizada entre sistemas partindo de configurações ligeiramente diferentes cresce rapidamente com o tempo, atingindo um valor de equilíbrio geralmente alto. Mesmo que a perturbação inicial seja mínima, ela propaga-se por todo o sistema. Deste modo, podemos dizer que os autómatos desta classe mostram grande sensibilidade às condições iniciais.

Por fim, consideremos a regra de transição $N(\phi) = 54$, um autómato pertencente à Classe IV de Wolfram. Mais uma vez relativamente às duas configurações apresentadas na Figura 1.44 e Figura 1.45, são os seguintes os respetivos diagramas espaço-tempo, desta vez para 34 instantes de tempo.

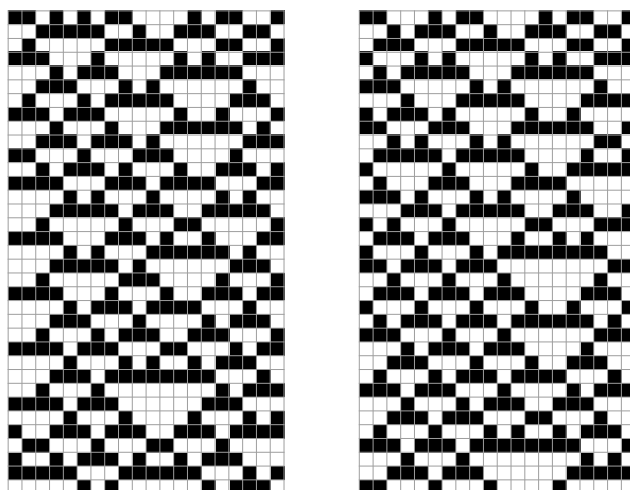


Figura 1.55: Diagramas espaço-tempo da regra de transição $N(\phi) = 54$, a partir das configurações anteriormente apresentadas na Figura 1.44 e na Figura 1.45.

A comparação das configurações assumidas em cada instante por cada sistema leva-nos à seguinte figura, onde se assinalam apenas as células cujo estado não era o mesmo.

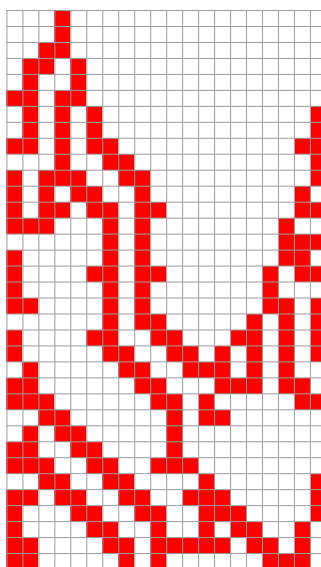


Figura 1.56: Comparação entre os diagramas espaço-tempo, relativos à regra de transição $N(\phi) = 54$, mostrados nas duas figuras anteriores, onde se assinalam as células que em cada instante têm estados diferentes.

Observando este gráfico, facilmente se reconhece que estamos perante uma variação da distância de Hamming normalizada muito diferente dos exemplos anteriores.

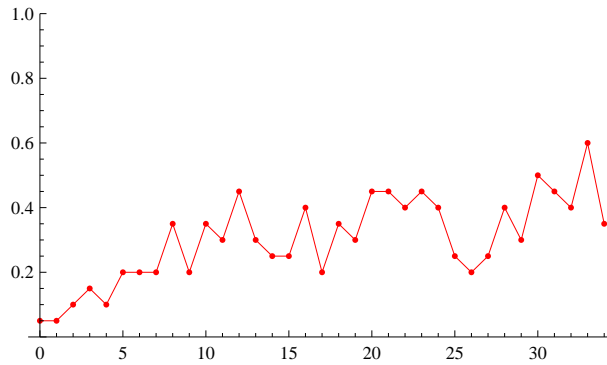


Figura 1.57: Variação da distância de Hamming normalizada relativamente aos diagramas espaço-tempo da regra de transição $N(\phi) = 54$ apresentados na Figura 1.55.

Desta vez é notório um crescimento lento do número de células com estado diferente em cada instante relativamente às configurações que estes sistemas assumiram ao do intervalo de tempo considerado, atingindo no entanto valores não muito pequenos. Esta será a classe de autómatos mais difícil de caracterizar a partir da variação da distância de Hamming normalizada entre configurações assumidas por sistemas ligeiramente diferentes no início. Ainda assim, é possível dizer o seguinte:

Classe IV – Para os autómatos pertencentes a esta classe, verifica-se que a distância de Hamming normalizada entre sistemas partindo de configurações ligeiramente diferentes apresenta um longo período transiente até atingir o seu ponto de equilíbrio, com um crescimento imprevisível. O seu valor final pode variar muito, dependendo do tamanho e da localização do dano inicial.

Esta caracterização da complexidade de um autómato a partir da comparação das dinâmicas assumidas partindo de configurações iniciais ligeiramente perturbadas é uma ideia herdada dos Sistemas Dinâmicos Discretos. Contudo, nesse contexto, o estudo da sensibilidade dos sistemas às condições iniciais tem como ponto de partida que o sistema têm um único atrator, pelo que as dinâmicas em comparação têm esse ponto importante em comum. No caso dos Autómatos Celulares Elementares é óbvia a coexistência de diferentes atratores⁶ pelo que a ideia original de estudar a sensibilidade às condições iniciais pode perder algum sentido. Mas é evidente que é possível caracterizar as diferentes complexidades das classes de Wolfram a partir da sensibilidade às condições iniciais dos autómatos.

⁶Exceto os autómatos pertencentes à Classe I de Wolfram.

Capítulo 2

Autómatos Celulares Periféricos no Plano

Quando, na década de 1980, Wolfram estudou autómatos celulares com maior profundidade, teve a curiosidade de ver se as dinâmicas que um sistema no plano revelava seriam muito diferentes daquelas que já tinha analisado e classificado nos Autómatos Celulares Elementares. Esse estudo, feito em colaboração com Norman Packard, veio a ser publicado em 1985, [Packard & Wolfram, 1985]. Uma das conclusões que Wolfram e Packard retiraram do seu trabalho com Autómatos Celulares bidimensionais foi que, apesar de algumas diferenças, sem muita importância, as dinâmicas encontradas para este tipo de sistemas se encaixavam perfeitamente nas quatro classes entretanto propostas para classificar os Autómatos Celulares Elementares. Contudo, os autores estavam conscientes que o estudo efetuado era muito diferente daquele que permitiu a classificação citada, uma vez que não tinha sido feito um escrutínio das dinâmicas possíveis: as conclusões foram retiradas a partir de uma amostra de regras escolhidas aleatoriamente, e daí que ditas típicas. De facto, é indiscutível que o número total de regras em ambos os casos estudados, autómatos com vizinhanças de von Neumann e com vizinhanças de Moore, atinge valores de tal modo elevados que tornam inviável repetir um estudo exaustivo como aquele feito anteriormente com os Autómatos Celulares Elementares.

Passados apenas alguns anos, primeiro Dietrich Stauffer, [Stauffer, 1989], e depois Dietrich Stauffer com Subhrangshu Sekhar Manna, [Manna & Stauffer, 1990], publicaram dois trabalhos chamando a atenção para um tipo de autómatos celulares bidimensionais, relativamente aos quais, fazendo o estudo das equivalências específicas para sistemas no plano, mostravam só existirem 4 586 classes de dinâmicas não equivalentes: são os chamados Autómatos Celulares Periféricos no plano. É curioso referir que, apesar do número total de

regras distintas para os Autómatos Celulares Periféricos no plano não ser muito elevado, o estudo efetuado por Stauffer e Manna ter sido, ainda assim, muito vago¹, não despertando a atenção devida. De seguida vamos apresentar este tipo de autómatos bidimensionais, mostrando como a generalização das equivalências dinâmicas anteriormente descritas para sistemas numa linha, nos leva a concluir existirem apenas um número não muito grande regras de transição não equivalentes.

2.1 Conceitos básicos

Neste capítulo vamos considerar autómatos celulares bidimensionais booleanos, definidos em quadrados e com condições de fronteira periódicas. Desse modo, vamos dizer que uma configuração C do sistema é descrita por uma matriz² quadrada $= (c_{ij})$, com $i, j = 1, \dots, n$, de elementos pertencentes a $\{0, 1\}$.

Definição 2.1. *Um Autómato Celular bidimensional diz-se periférico se a regra de transição local depender do estado dos quatro vizinhos de uma célula, mas não do seu próprio.*

Dado um Autómato Celular Periférico Φ , seja $C' = \Phi(C)$, com C uma qualquer configuração. Então, vamos escrever a regra de transição local como

$$c'_{i,j} = \phi(c_{i-1,j}, c_{i,j-1}, c_{i,j+1}, c_{i+1,j}), \quad (2.1)$$

para $i, j = 1, \dots, n$ e onde se aplicam as condições de fronteira periódicas, isto é, onde

$$c_{0,j} = c_{n,j}$$

$$c_{n+1,j} = c_{1,j},$$

para $j = 1, \dots, n$, e

$$c_{i,0} = c_{i,n}$$

$$c_{i,n+1} = c_{i,1}.$$

para $i = 1, \dots, n$. Deste modo, atendendo a (2.1), um Autómato Celular Periférico bidimensional fica especificado quando ficar definido um valor de ϕ para todas as dezasseis situações possíveis para os estados das células pertencentes à vizinhança. Vejamos um exemplo.

¹Apesar de Stauffer, no final da década de 1980, usar um computador Cray-XMP/416, dos mais rápidos computadores disponíveis, a capacidade de processamento atual é de longe superior.

²Com esta escolha, estamos a declarar que o estado da primeira das células da linha do topo do sistema vai ser identificado como c_{11} .

Consideremos um sistema quadrado com $n = 12$, isto é, com 12×12 células, e seja C a configuração cuja representação gráfica é dada na figura seguinte:

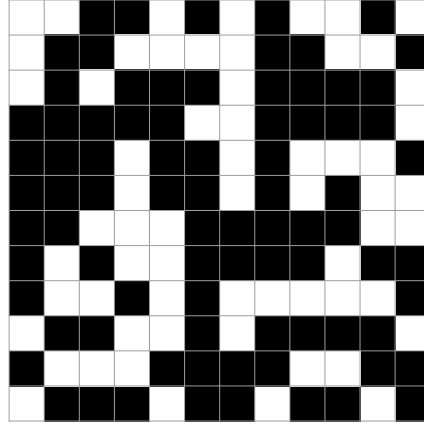


Figura 2.1: Representação gráfica da configuração assumida por um sistema de 12×12 células.

Consideremos, agora, o Autómato Celular Periférico bidimensional ϕ definido por

$$\begin{aligned} \phi(0,0,0,0) &= 0 & \phi(0,0,0,1) &= 0 & \phi(0,0,1,0) &= 0 & \phi(0,0,1,1) &= 1 \\ \phi(0,1,0,0) &= 1 & \phi(0,1,0,1) &= 1 & \phi(0,1,1,0) &= 0 & \phi(0,1,1,1) &= 1 \\ \phi(1,0,0,0) &= 1 & \phi(1,0,0,1) &= 1 & \phi(1,0,1,0) &= 1 & \phi(1,0,1,1) &= 1 \\ \phi(1,1,0,0) &= 0 & \phi(1,1,0,1) &= 1 & \phi(1,1,1,0) &= 0 & \phi(1,1,1,1) &= 1 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, descrito graficamente como

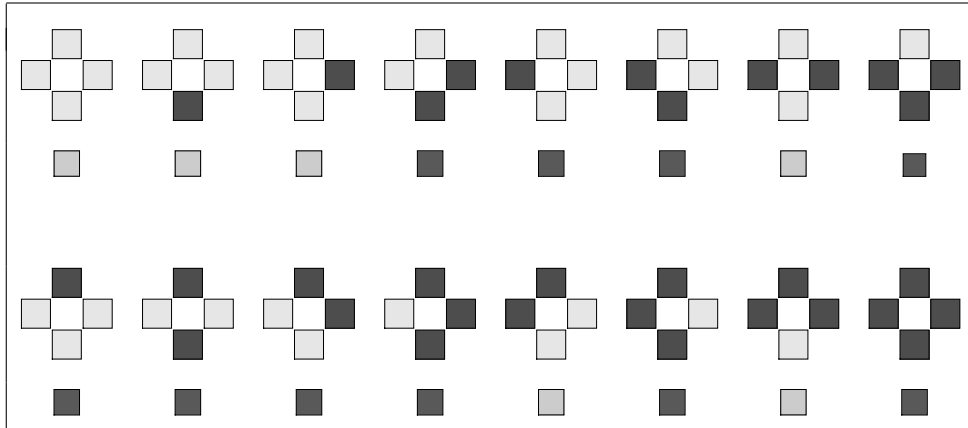


Figura 2.2: Representação gráfica da regra de transição local de um Autómato Celular Periférico bidimensional.

onde, desta vez, se optou por representar os estados 0 e 1 por quadrados com dois níveis diferentes de cinzento, deixando o branco para acentuar que o estado da célula central não

é nenhuma das variáveis da regra de transição local ϕ . Assim sendo, a partir da regra explicitada, temos que a configuração $C' = \Phi(C)$ que o sistema vai assumir no instante seguinte pode ser representada do seguinte modo:

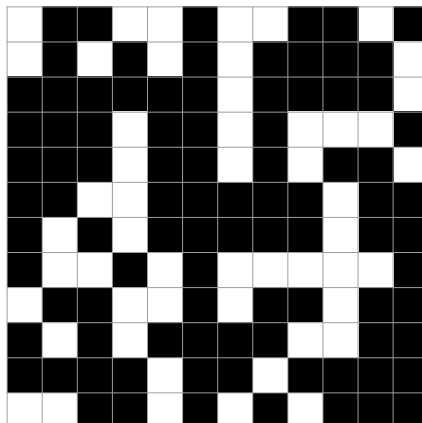


Figura 2.3: Representação gráfica da configuração determinada pela regra de transição local apresentada na Figura 2.2, a partir da configuração representada na Figura 2.1.

Aplicando uma outra vez a regra de transição local poderemos, de modo análogo, obter a configuração que o sistema assume dois instantes após a configuração inicial C e assim sucessivamente. Infelizmente o diagrama espaço-tempo para sistemas bidimensionais não é de leitura tão fácil como no caso de sistemas de células numa linha: de facto, se queremos analisar a dinâmica do autómato, teremos que representar os diferentes quadrados correspondentes às configurações assumidas pelo sistema ao longo do tempo. Na figura seguinte, podemos observar a evolução temporal do sistema anterior a partir da representação gráfica das configurações assumidas ao longo de 17 instantes, assumindo a configuração C como a configuração inicial do sistema, com o tempo a crescer da esquerda para a direita e de cima para baixo.



Figura 2.4: As configurações que o sistema assume nos 17 instantes seguintes, partindo da configuração C, com o tempo a crescer da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Olhando para a figura anterior, é notório que o estudo dos autómatos celulares no plano perde uma das mais valiosas ferramentas do estudo das dinâmicas dos autómatos celulares unidimensionais: o diagrama espaço-tempo que nos permite comparar facilmente as configurações assumidas pelo sistema ao longo de um certo intervalo de tempo. No entanto, para o exemplo agora descrito, é ainda possível³ perceber que a configuração assumida pelo sistema no instante $T = 3$ se vai repetir no instante $T = 14$. Observando um pouco

³Neste caso o número de elementos do sistema é relativamente pequeno, assim como o intervalo de tempo da simulação.

melhor, podemos ver que a dinâmica do sistema após o instante $T = 3$ não é mais que o deslocamento de baixo para cima dessa mesma configuração, logo estamos perante um ciclo composto por doze configurações.

Analogamente ao proposto por Wolfram para os Autómatos Celulares Elementares, também para os Autómatos Celulares Periféricos bidimensionais vamos poder introduzir um código que vai associar de forma única um número inteiro a cada autómato. Para tal, teremos que fixar uma ordem para as dezasseis configurações possíveis para as células vizinhas de uma célula do sistema: do nosso ponto de vista, a escrita das diferentes variáveis na expressão (2.1) da regra de transição local, determina a seguinte ordem para as dezasseis possíveis configurações para as quatro células vizinhas.

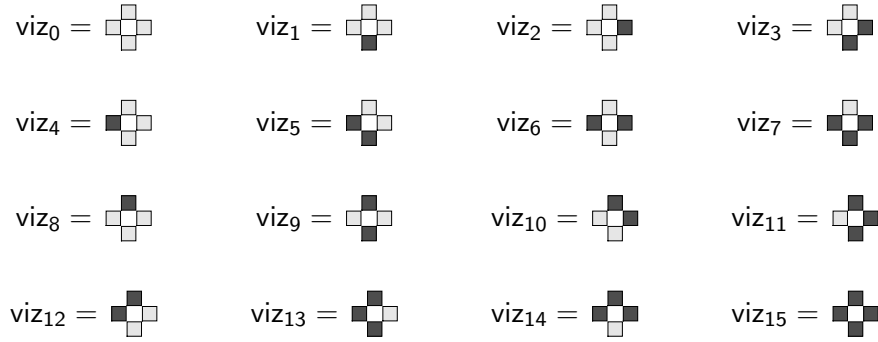


Figura 2.5: Uma ordem para as 16 diferentes configurações distintas para a vizinhança de uma qualquer célula do sistema.

Assim sendo, vai ser a colecção dos dígitos d_k , o estado da célula central perante a configuração viz_k , com $k = 0, \dots, 15$, que determina o número inteiro pretendido.

Definição 2.2. *Dado um Autómato Celular Periférico bidimensional Φ , chama-se representação de Wolfram de Φ ao número inteiro $N(\Phi)$ obtido como*

$$N(\Phi) = (d_{15} d_{14} d_{13} d_{12} d_{11} d_{10} d_9 d_8 d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_2,$$

com os dígitos d_k dados por

$$\begin{aligned} d_{15} &= \phi(1, 1, 1, 1) & d_{14} &= \phi(1, 1, 1, 0) & d_{13} &= \phi(1, 1, 0, 1) & d_{12} &= \phi(1, 1, 0, 0) \\ d_{11} &= \phi(1, 0, 1, 1) & d_{10} &= \phi(1, 0, 1, 0) & d_9 &= \phi(1, 0, 0, 1) & d_8 &= \phi(1, 0, 0, 0) \\ d_7 &= \phi(0, 1, 1, 1) & d_6 &= \phi(0, 1, 1, 0) & d_5 &= \phi(0, 1, 0, 1) & d_4 &= \phi(0, 1, 0, 0) \\ d_3 &= \phi(0, 0, 1, 1) & d_2 &= \phi(0, 0, 1, 0) & d_1 &= \phi(0, 0, 0, 1) & d_0 &= \phi(0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Deste modo, ficamos a saber que o Autómatos Celular Periférico bidimensional introduzido na Figura 2.2 tem representação de Wolfram

$$(1010111110111000)_2 = 44\,984.$$

Vejamos agora um segundo exemplo: consideremos o Autómatos Celular Periférico bidimensional Φ cuja representação de Wolfram é $N(\Phi) = 59\,614$. Tal como foi feito anteriormente, a explicitação da regra de transição local vai ser conseguida escrevendo este inteiro na base binária,

$$59\,614 = (1110100011011110)_2,$$

e aceitando o dígito d_k como resposta do sistema perante a configuração viz_k , atrás descrita. Graficamente, vamos ter

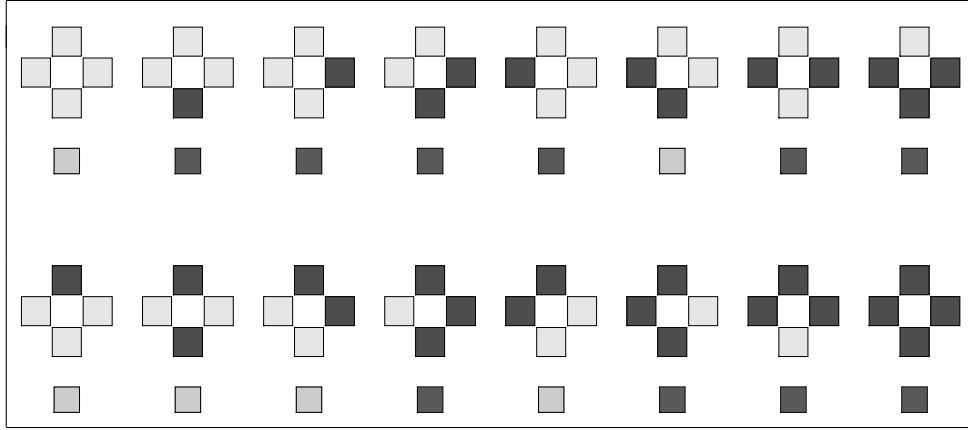


Figura 2.6: Representação gráfica da regra de transição local do Autómatos Celular Periférico bidimensional Φ com representação de Wolfram $N(\Phi) = 59\,614$.

Assim sendo, escolhida uma configuração inicial C para o sistema, desta vez um quadrado de 20×20 células,

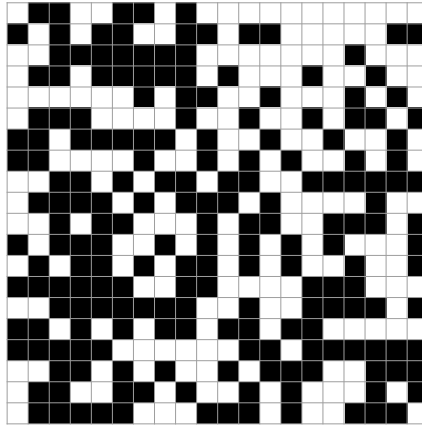


Figura 2.7: Representação gráfica da configuração C assumida inicialmente por um sistema de 20×20 células.

obtém-se facilmente, por aplicação das regras descritas acima, a configuração $C' = \Phi(C)$ assumida pelo sistema no instante seguinte,

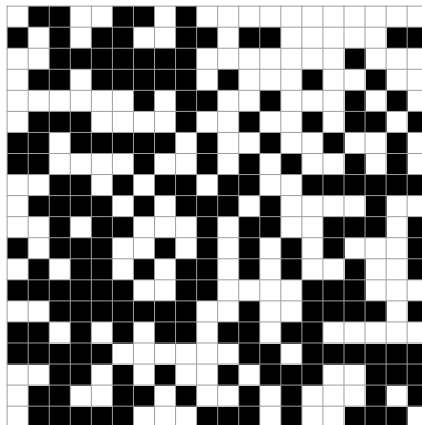


Figura 2.8: Representação gráfica da configuração $C' = \Phi(C)$ assumida pelo sistema um instante depois.

Repetindo um pouco aquilo que foi feito para os Autómatos Celulares Elementares, também para sistemas no plano vai ser possível olhar para certas dinâmicas, certos autómatos, como equivalentes. Desse modo, e sobretudo porque o número de simetrias do plano são três, vamos ver que o número de Autómatos Celulares Periféricos no plano não equivalentes é bastante mais reduzido que o número total de situações diferentes, 65 536.

2.2 Equivalência de regras de transição local

Como vimos anteriormente para os Autômatos Celulares Elementares, certas dinâmicas são qualitativamente iguais, tendo sido assim possível definir uma equivalência entre elas. Seguindo de perto o que foi feito para o caso mais simples, vamos começar por definir transformações entre configurações do sistema, para depois afirmar como equivalentes aqueles autômatos que preservam essas simetrias.

Definição 2.3. *Seja $C = (c_{ij})$ uma qualquer configuração do sistema. Vamos dizer que $C' = (c'_{ij})$ é a configuração conjugada de C , e escrever $C' = \bar{C}$, sempre que $c'_{ij} = \bar{c}_{ij}$, para $i, j = 1, \dots, n$, com $\bar{0} = 1$ e $\bar{1} = 0$.*

Assim sendo, podemos dizer que dois autômatos são conjugados sempre que a simetria por conjugação de configurações iniciais seja conservada no instante seguinte.

Definição 2.4. *Dados dois autômatos Φ e Φ' , vamos dizer que eles são conjugados, e escrever $\Phi' = T_c(\Phi)$, quando verificam a igualdade*

$$\Phi'(\bar{C}) = \overline{\Phi(C)}, \quad (2.2)$$

para toda a configuração C .

Como facilmente se reconhece, dados autômatos conjugados, Φ e $\Phi' = T_c(\Phi)$, a simetria por conjugação de configurações iniciais vai ser preservada não apenas no instante seguinte, mas para todo o instante T . O resultado seguinte, cuja prova evoca argumentos semelhantes ao resultado análogo para Autômatos Celulares Elementares e por isso será omitida, vai permitir identificar o conjugado de qualquer autômato, a partir da sua representação de Wolfram.

Proposição 2.1. *Seja Φ um Autômato Celular Periférico bidimensional com representação de Wolfram $N(\Phi) = (d_{15}d_{14}d_{13}d_{12}d_{11}d_{10}d_9d_8d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$. Então, o Autômato Celular Periférico bidimensional $\Phi' = T_c(\Phi)$ conjugado de Φ tem representação de Wolfram $N(\Phi') = (\bar{d}_0\bar{d}_1\bar{d}_2\bar{d}_3\bar{d}_4\bar{d}_5\bar{d}_6\bar{d}_7\bar{d}_8\bar{d}_9\bar{d}_{10}\bar{d}_{11}\bar{d}_{12}\bar{d}_{13}\bar{d}_{14}\bar{d}_{15})_2$.*

Voltemos ao nosso último exemplo, o Autômato Celular Periférico bidimensional com representação de Wolfram $N(\Phi) = 59614$. Como vimos anteriormente, a representação binária de $N(\Phi)$ é dada por

$$N(\Phi) = (1110100011011110)_2,$$

donde se deduz que a representação de Wolfram de $T_c(\Phi)$ é igual a

$$N(T_c(\Phi)) = (1000010011101000)_2,$$

ou seja, temos que $N(T_c(\Phi)) = 34\,024$. Sendo autómatos conjugados, $N(\Phi) = 59\,614$ e $N(\Phi') = 34\,024$, a representação gráfica da evolução temporal a partir de C e \bar{C} , com C uma configuração aleatoriamente escolhida num quadrado 20×20 , mostra como a simetria é preservada ao longo do tempo.



Figura 2.9: Representação gráfica da evolução temporal de uma configuração C e da sua conjugada, por dois autómatos conjugados, $N(\Phi) = 56\,614$, à esquerda, e $N(\Phi') = 34\,024$, à direita.

Vejamos agora como é possível introduzir as simetrias do plano para configurações num quadrado $n \times n$.

Definição 2.5. Seja $C = (c_{i,j})$, com $i, j = 1, \dots, n$ uma qualquer configuração do sistema. Vamos dizer que:

- $C' = (c'_{ij})$ é a configuração obtida de C por uma transformação de simetria relativamente a um eixo vertical, e escrever $C' = T_{lr}C$, sempre que $c'_{ij} = c_{i,n+1-j}$;
- $C' = (c'_{ij})$ é a configuração obtida de C por uma transformação de simetria relativamente a um eixo horizontal, e escrever $C' = T_{ud}C$, sempre que $c'_{ij} = c_{n+1-i,j}$;
- $C' = (c'_{ij})$ é a configuração obtida de C por uma transformação de simetria relativamente a um eixo na diagonal do quadrado, e escrever $C' = T_dC$, sempre que $c'_{ij} = c_{j,i}$.

Os exemplos seguintes ilustram cada uma destas definições.

Consideremos a configuração C anterior. Nas figuras seguintes serão mostradas as configurações que se obtêm de C pelas transformações de simetria relativamente a eixos colocados na vertical, na horizontal e na diagonal do quadrado. Para que a leitura da simetria seja facilitada, em cada caso foi escolhido um posicionamento diferente para as duas configurações.

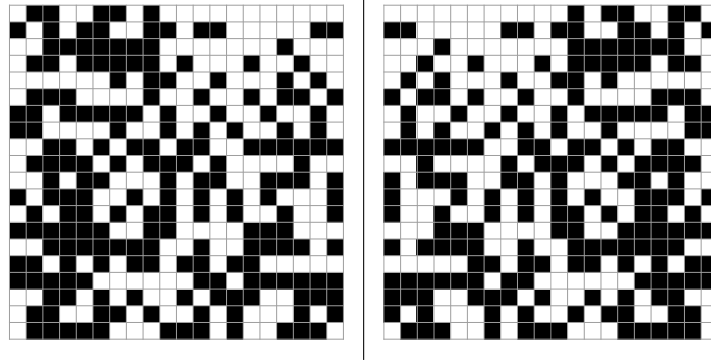


Figura 2.10: Representação gráfica de uma configuração C e da sua transformada por uma transformação de simetria relativamente a um eixo vertical.

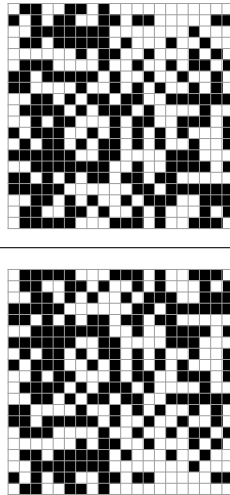


Figura 2.11: Representação gráfica de uma configuração C e da sua transformada por uma transformação de simetria relativamente a um eixo horizontal.

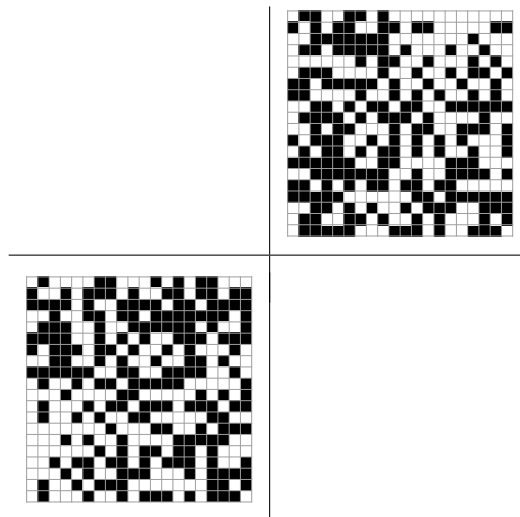


Figura 2.12: Representação gráfica de uma configuração C e da sua transformada por uma transformação de simetria relativamente a um eixo na diagonal.

Cada uma destas simetrias do plano entre configurações do sistema vai induzir, de forma análoga ao efetuado para os Autómatos Celulares Elementares, uma transformação entre regras de transição local.

Definição 2.6. *Sejam Φ e Φ' Autômatos Celulares Periféricos bidimensionais e C uma qualquer configuração para o sistema. Então,*

- *vamos dizer que Φ' é obtido de Φ por uma transformação de simetria relativa a um eixo vertical, e escrever $\Phi' = T_{lr}(\Phi)$, se*

$$\Phi'(T_{lr}(C)) = T_{lr}(\Phi(C)); \quad (2.3)$$

- *vamos dizer que Φ' é obtido de Φ por uma transformação de simetria relativa a um eixo horizontal, e escrever $\Phi' = T_{ud}(\Phi)$, se*

$$\Phi'(T_{ud}(C)) = T_{ud}(\Phi(C)); \quad (2.4)$$

- *vamos dizer que Φ' é obtido de Φ por uma transformação de simetria relativa a um eixo na diagonal, e escrever $\Phi' = T_d(\Phi)$, se*

$$\Phi'(T_d(C)) = T_d(\Phi(C)). \quad (2.5)$$

É importante salientar que autômatos transformados preservam a simetria correspondente não apenas no instante seguinte, mas para todo o instante $T > 0$. De seguida vamos apresentar os resultados que permitem encontrar a representação de Wolfram do transformado de qualquer Autômato Celular Periférico bidimensional.

Proposição 2.2. *Seja Φ um Autômato Celular Periférico bidimensional com representação de Wolfram $N(\Phi) = (d_{15}d_{14}d_{13}d_{12}d_{11}d_{10}d_9d_8d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$. Então,*

- $\Phi' = T_{lr}(\Phi)$ *tem representação de Wolfram*

$$N(\Phi') = (b_{15} b_{14} b_{11} b_{10} b_{13} b_{12} b_9 b_8 b_7 b_6 b_3 b_2 b_5 b_4 b_1 b_0)_2;$$

- $\Phi' = T_{ud}(\Phi)$ *tem representação de Wolfram*

$$N(\Phi') = (b_{15} b_7 b_{13} b_5 b_{11} b_3 b_9 b_1 b_{14} b_6 b_{12} b_4 b_{10} b_2 b_8 b_0)_2;$$

- $\Phi' = T_d(\Phi)$ *tem representação de Wolfram*

$$N(\Phi') = (b_{15} b_{13} b_{14} b_{12} b_7 b_5 b_6 b_4 b_{11} b_9 b_{10} b_8 b_3 b_1 b_2 b_0)_2.$$

Os argumentos que nos permitem chegar a estas três expressões são análogos aos já utilizados no caso dos Autômatos Celulares Elementares, pelo que a prova do resultado anterior será omitida. Vejamos agora quais os transformados por estas simetrias do plano do autômato anteriormente considerado.

Seja Φ o Autômato Celular Periférico bidimensional com representação de Wolfram $N(\Phi) = 59614$. Então, uma vez que

$$N(\Phi) = (1110100011011110)_2,$$

a proposição anterior diz-nos que

$$N(T_r(\Phi)) = (1110100011110110)_2 = 59638$$

$$N(T_{ud}(\Phi)) = (1110110111010100)_2 = 60884$$

$$N(T_d(\Phi)) = (1110101110001110)_2 = 60302.$$

Vejamos graficamente qual a evolução temporal que estes autômatos determinam para configurações iniciais obtidas da configuração C anteriormente considerada pelas transformações de simetria descritas.



Figura 2.13: Representação gráfica da evolução temporal de uma configuração C e da sua transformada $T_r(C)$, pelos autómatos $N(\Phi) = 56\,614$, à esquerda, e $N(\Phi') = 59\,638$, à direita.

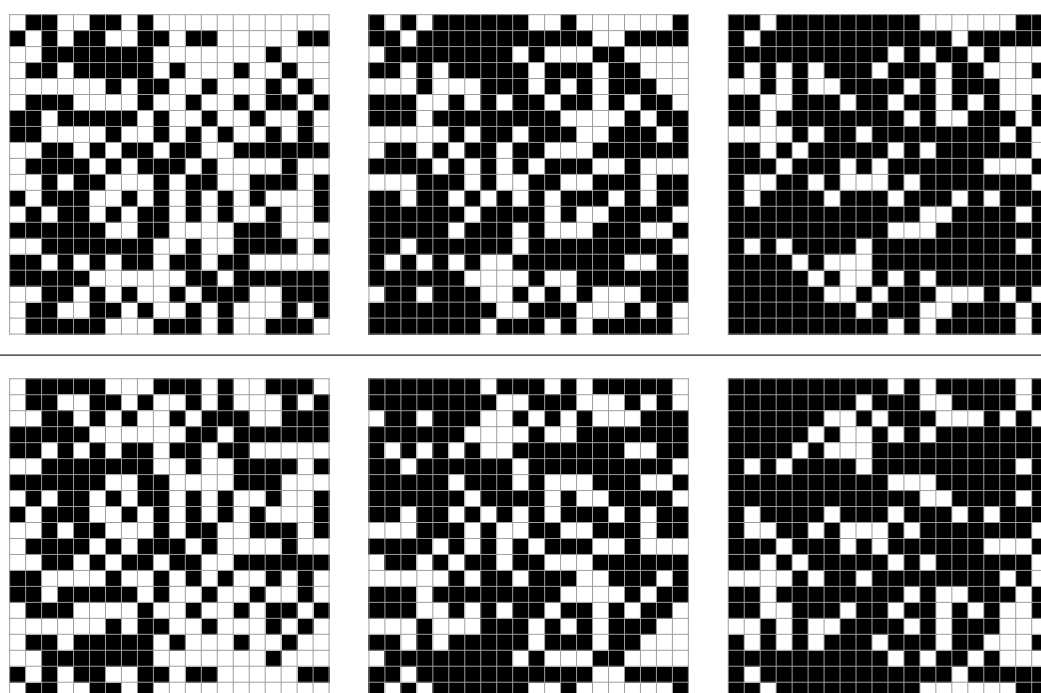


Figura 2.14: Representação gráfica da evolução temporal de uma configuração C e da sua transformada $T_{ud}(C)$, pelos autómatos $N(\Phi) = 56\,614$, em cima, e $N(\Phi') = 60\,884$, em baixo.

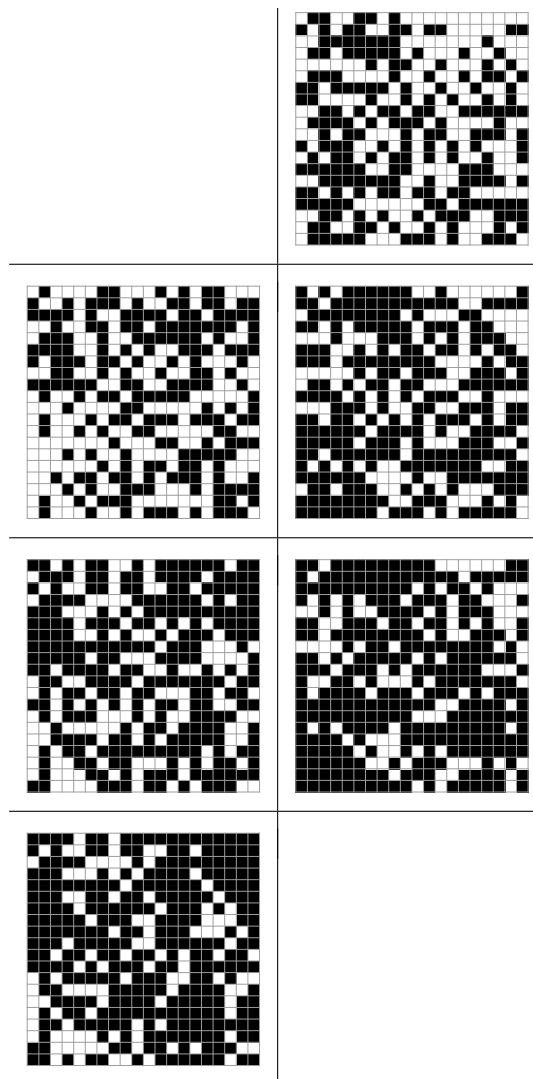


Figura 2.15: Representação gráfica da evolução temporal de uma configuração C e da sua transformada $T_d(C)$, pelos autómatos $N(\Phi) = 56\,614$, à direita, e $N(\Phi') = 60\,302$, à esquerda.

Acabámos de descrever as quatro transformações, ditas básicas, de uma qualquer configuração booleana num quadrado. No entanto, e tal como foi feito para os Autómatos Celulares Elementares, estas simetrias não esgotam todas as possibilidades para a igualdade qualitativa entre regras de transição local, devendo igualmente ser estudadas todas as composições destas transformações básicas.

Proposição 2.3. *Existem quinze transformações de equivalência entre Autómatos Celulares Periféricos no plano, que podem ser apresentados da seguinte forma:*

$$\begin{array}{cccccc}
T_c & T_{lr} & T_{ud} & T_d & & \\
T_c \cdot T_{lr} & T_c \cdot T_{ud} & T_c \cdot T_d & T_{lr} \cdot T_{ud} & T_{lr} \cdot T_d & T_{ud} \cdot T_d \\
T_c \cdot T_{lr} \cdot T_{ud} & T_c \cdot T_{lr} \cdot T_d & T_c \cdot T_{ud} \cdot T_d & T_{lr} \cdot T_{ud} \cdot T_d & & \\
T_c \cdot T_{lr} \cdot T_{ud} \cdot T_d & & & & &
\end{array}$$

Prova: Pela definição de cada uma das transformações básicas, podemos estabelecer que todas elas são iguais à sua inversa, ou seja, que:

$$T_c \cdot T_c = \text{id} \quad T_{lr} \cdot T_{lr} = \text{id} \quad T_{ud} \cdot T_{ud} = \text{id} \quad T_d \cdot T_d = \text{id} \quad (2.6)$$

onde por id se denota a transformação identidade. Também igualmente fácil é a verificação que apenas algumas das transformações básicas não comutam entre si, isto é, que

$$\begin{array}{lll}
T_{lr} \cdot T_c = T_c \cdot T_{lr} & T_{ud} \cdot T_c = T_c \cdot T_{ud} & T_d \cdot T_c = T_c \cdot T_d \\
T_{ud} \cdot T_{lr} = T_{lr} \cdot T_{ud} & T_d \cdot T_{lr} = T_{ud} \cdot T_d & T_d \cdot T_{ud} = T_{lr} \cdot T_d
\end{array} \quad (2.7)$$

Consideremos agora uma qualquer composição de m transformações básicas $T_{b_1} \cdot T_{b_2} \cdot \dots \cdot T_{b_m}$. Mas, por (2.7), sabemos que esta transformação pode ser reescrita como a composição de m_1 transformações

$$T_c \cdot T_c \cdot \dots \cdot T_c$$

seguidas de m_2 transformações

$$T_{lr} \cdot T_{lr} \cdot \dots \cdot T_{lr}$$

seguidas de m_3 transformações

$$T_{ud} \cdot T_{ud} \cdot \dots \cdot T_{ud}$$

seguidas ainda por m_4 transformações

$$T_d \cdot T_d \cdot \dots \cdot T_d$$

com m_1, m_2, m_3, m_4 inteiros não negativos tais que $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m$. Assim sendo, por (2.6), teremos apenas que considerar duas situações: quando m_i é zero, ou quando m_i é um número ímpar. As transformações explicitadas surgem então quando se consideram todas as situações possíveis. \square

Naturalmente que a motivação para estudarmos todas estas quinze transformações entre regras de transição local está a eventualidade de provarmos um resultado que relacione as suas dinâmicas, ou seja, na possibilidade das suas dinâmicas serem qualitativamente iguais. O resultado seguinte, que se apresenta sem a sua prova, uma vez que os argumentos

são análogos aos referidos na prova do resultado correspondente para Autômatos Celulares Elementares, enuncia exatamente essa equivalência das dinâmicas.

Teorema 2.1. *Seja Φ um qualquer Autômato Celular Periférico bidimensional e seja T uma qualquer das quinze transformações citadas. Tal como fizemos anteriormente, vamos simplificar e denotar por T a transformação correspondente no espaço das configurações. Então,*

- *se a configuração C é um ponto fixo para Φ , então, $T(C)$ é um ponto fixo para $T(\Phi)$;*
- *se o conjunto de configurações $\{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ é um ciclo de período p para Φ , então $\{T(C_1), T(C_2), \dots, T(C_p)\}$ é um ciclo de igual período para $T(\Phi)$;*
- *se a configuração C pertence à bacia de atração \mathcal{B}_A de um ponto fixo ou um ciclo de Φ , então $T(C)$ pertence à bacia de atração $\mathcal{B}_{T(A)}$ do ponto fixo ou ciclo correspondente de $T(\Phi)$.*

Consideremos o Autômato Celular Periférico bidimensional $N(\phi) = 123$. Os resultados apresentados anteriormente permite-nos encontrar o conjunto dos autômatos cujas dinâmicas lhe são equivalentes:

$8703 = T_c(123)$	$111 = T_{lr}(123)$
$5457 = T_{ud}(123)$	$1805 = T_d(123)$
$2559 = (T_c \cdot T_{lr})(123)$	$30039 = (T_c \cdot T_{ud})(123)$
$20255 = (T_c \cdot T_d)(123)$	$5445 = (T_{lr} \cdot T_{ud})(123)$
$1551 = (T_{lr} \cdot T_d)(123)$	$4913 = (T_{ud} \cdot T_d)(123)$
$23895 = (T_c \cdot T_{lr} \cdot T_{ud})(123)$	$3999 = (T_c \cdot T_{lr} \cdot T_d)(123)$
$29495 = (T_c \cdot T_{ud} \cdot T_d)(123)$	$4659 = (T_{lr} \cdot T_{ud} \cdot T_d)(123)$
$13239 = (T_c \cdot T_{lr} \cdot T_{ud} \cdot T_d)(123)$	

Como é possível concluir pela tabela acima, estamos perante um exemplo em que o número de Autômatos Celulares Periféricos bidimensionais dinamicamente equivalentes é igual a 16. Contudo, tal como já ocorreu para os Autômatos Celulares Elementares, este número não é atingido para todos os autômatos. Atendendo a todas essas situações, podemos

determinar quais são os Autómatos Celulares Periféricos bidimensionais dinamicamente não equivalentes. O resultado seguinte diz-nos exatamente quantos são esses autómatos.

Teorema 2.2. *Existem 4856 Autómatos Celulares Periféricos bidimensionais não equivalentes.*

Muito embora outros trabalhos publicados antes tenham abordado esta questão da equivalência entre este tipo de sistemas, a explicitação daqueles que são dinamicamente distintos foi pela primeira vez apresentada em [Freitas, 2012]. De seguida, vamos apresentar alguns dos resultados obtidos J. Freitas, relativamente à classificação dos Autómatos Celulares Periféricos no plano.

2.3 Autómatos Celulares Periféricos Homogêneos no Plano

Por razões pouco evidentes⁴, nunca foi realizado um estudo pormenorizado de todos os Autómatos Celulares Periféricos bidimensionais, não existindo portanto a sua classificação pelas diferentes classes introduzidas por Wolfram das suas dinâmicas. Em 2012, foi publicado um trabalho preliminar, [Freitas, 2012], que identifica todas as regras de transição local pertencentes à Classe I e algumas das regras de transição local pertencentes às classes II e III. Para este nosso trabalho só nos interessa os autómatos pertencentes à primeira destas classes, pelo que de seguida passamos a apresentar uma listagem das regras de transição $N(\phi)$ pertencentes à Classe I de Wolfram.

Nas duas tabelas seguintes são identificadas todas as 356 regras de transição $N(\phi)$ cujo comportamento dominante tem como atrator uma configuração homogênea ponto fixo, ou um ciclo formado por ambas as configurações homogêneas. De notar que alguns destes autómatos podem ter ambas as configurações homogêneas como ponto fixo.

⁴Talvez uma descrença que este tipo de sistema mostrasse novidades relativamente às dinâmicas exibidas pelos Autómatos Celulares Elementares, associado ao número relativamente elevado de dinâmicas não equivalentes.

0	3	7	8	23	25	27	31	40	61
63	64	67	69	71	72	87	89	91	95
104	127	128	136	168	192	200	232	287	297
299	301	303	317	319	327	329	333	335	351
361	363	367	381	383	415	447	479	552	573
575	576	579	583	584	599	601	603	607	616
637	640	648	680	704	712	744	809	815	829
831	863	875	879	893	919	927	983	991	1056
1063	1064	1120	1127	1128	1152	1160	1184	1192	1216
1224	1248	1256	1337	1339	1403	1632	1639	1640	1659
1664	1672	1696	1704	1728	1736	1760	1768	2176	2184
2208	2216	2240	2248	2272	2280	2455	2519	2720	2728
2752	2760	2784	2792	3031	3232	3240	3296	3304	3808
5248	5256	5312	5320	5760	5768	5824	5832	6272	6280
6304	6312	6336	6344	6368	6376	6816	6824	6848	6856
6880	6888	7328	7392	7904	10240	10248	10280	10304	10312
10344	10368	10376	10408	10432	10440	10472	10752	10760	10792
10816	10824	10856	10880	10888	10920	10944	10952	11272	11296
11304	11336	11360	11368	11392	11400	11424	11432	11456	11464
11488	11496	11784	11808	11816	11848	11872	11880	11904	11912
11936	11944	11968	11976	12000	15488	15496	15552	15560	16000
16008	16064	26752	26760	26792	26816	26824	26856	27304	27328

Tabela 2.1: Regras de transição $N(\phi)$ cujo comportamento dominante tem como atrator uma configuração homogênea ponto fixo, ou um ciclo formado por ambas as configurações homogêneas.

27336	27368	27808	27816	27872	27880	28384	32768	32776	32808
32832	32840	32872	32896	32904	32936	32960	32968	33000	33320
33344	33352	33384	33408	33416	33448	33472	33480	33512	33824
33832	33888	33896	33920	33928	33952	33960	33984	33992	34016
34024	34400	34408	34432	34440	34464	34472	34496	34504	34528
34536	34944	34952	34976	34984	35008	35016	35040	35048	35488
35496	35520	35528	35552	35560	36000	36008	36064	36072	36576
38016	38024	38080	38088	38528	38536	38592	38600	39040	39048
39072	39080	39104	39112	39136	39144	39584	39592	39616	39624
39648	40096	40160	40672	43008	43016	43048	43072	43080	43112
43136	43144	43176	43200	43208	43520	43528	43560	43584	43592
43624	43648	43656	43688	43712	43720	44040	44064	44072	44104
44128	44136	44160	44168	44192	44200	44224	44232	44256	44552
44576	44584	44616	44640	44672	44680	44704	44736	48256	48264
48320	48328	48768	48776	48832	59520	59528	59560	59584	59592
59624	60072	60096	60104	60576	60640				

Tabela 2.2: Regras de transição local cujo comportamento dominante tem como atrator um ponto fixo que é uma configuração homogênea, ou um ciclo formado por ambas as configurações homogêneas (continuação).

Estas são, sem dúvida alguma, as regras de transição local mais fáceis de identificar: não só é conhecido o estado final do sistema, como os transientes são menores que para as outras situações. Contudo, uma das conclusões mais surpreendentes do estudo de Freitas revelamos que é visível uma diferença de complexidade entre os Autômatos Celulares Periféricos no plano pertencentes a esta classe. Por outras palavras, apesar da simplicidade da sua caracterização, uma consequência da simplicidade dos seus estados finais, estamos perante um conjunto de autômatos que mostram formas muito diversas de chegar aos estados finais homogêneos. Aliada a essas formas dos sistemas evoluírem para um estado final homogêneo está também o facto do crescimento do tamanho relativo da bacia de atração desse estado final homogêneo poder ser extremamente lento, ao contrário do que sucede nos Autômatos Celulares Elementares pertencentes à Classe I de Wolfram.

No capítulo que se segue vamos apresentar um tipo de autômatos no plano, apresentado por três investigadores brasileiros, como modelo para a regulação genética.

Capítulo 3

O Modelo de Sales, Martins e Stariolo

Neste capítulo iremos estudar um modelo computacional, introduzido por José Sales, Marcelo Martins e Daniel Stariolo, em [Sales, Martins & Stariolo, 1997], que se propõe simular redes de regulação genética (ver também [Silva, 2003]).

3.1 Um modelo computacional para a regulação genética

O modelo computacional que vamos introduzir tem as características básicas de um autômato celular bidimensional, na medida em que é discreto no tempo, no espaço e nos valores que cada elemento do sistema pode assumir. No entanto, o fenómeno a modelar determina que outros conceitos familiares nos autômatos celulares básicos sejam generalizados: muito embora o número de vizinhos K que influencia a transição de uma célula seja igual para todas as células do sistema, vamos ver que o próprio conceito de vizinhança de uma célula, como aquelas células que lhe estão próximas, vai ser alterado. Essa nova ideia de vizinhança vai implicar que a escolha dos vizinhos de uma célula seja realizada para cada uma das células, sendo então possível ter vizinhanças topologicamente distintas para elementos de um mesmo sistema. Por fim, a regra booleana de transição local vai, também ela, ser diferente para cada célula, ao contrário do que se passa com os autômatos celulares mais simples.

A situação mais simples para este modelo considera um sistema bidimensional quadrado $n \times n$, onde o estado de cada uma das células é influenciado pelos estados das $K = 9$ células¹ pertencentes à sua vizinhança de Moore. Para simplificar, vamos numerar cada uma das nove células da vizinhança: a própria célula terá o número 0 e as restantes células

¹Os dados experimentais mostram que K deve ser escolhido entre seis e dez.

vizinhas terão a numeração como se mostra na figura seguinte.

1	2	3
8	0	4
7	6	5

Com esta notação, podemos escrever a regra booleana de transição local que determina o estado da célula central no instante $t + 1$ como

$$\begin{aligned} \sigma_0(t+1) = & \operatorname{sgn}(J_0 \times \sigma_0(t) + J_1 \times \sigma_1(t) + J_2 \times \sigma_2(t) + J_3 \times \sigma_3(t) + \\ & + J_4 \times \sigma_4(t) + J_5 \times \sigma_5(t) + J_6 \times \sigma_6(t) + J_7 \times \sigma_7(t) + J_8 \times \sigma_8(t)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde por $\sigma_i(t)$, com $i = 0, \dots, 8$, se denota o estado da célula i no instante t . Nesta expressão, J_0, J_1, \dots, J_8 são constantes associadas a cada uma das células da vizinhança que tomam valores em $\{-1, 0, 1\}$. Os autómatos cuja regra de transição local é determinada por um limiar são habitualmente designados por Autómatos Celulares com Limiar².

Uma vez que as constantes J_i , designadas por constantes de acoplamento, multiplicam o valor do estado da célula correspondente, facilmente se reconhece que o seu valor determina um sentido para a influência da célula i na soma (3.1) que estabelece o valor de $\sigma_0(t+1)$: diz-se que se a célula i tem um papel inibidor se a constante J_i for igual a -1 , um papel ativador se J_i for igual a 1 e, por fim, um papel neutro sempre que J_i for igual a 0 .

Os dados experimentais mostram que a influência que cada célula do sistema sofre dos seus vizinhos não deve ser igual para todos os elementos do sistema. Assim sendo, para cada célula do sistema, vamos escolher o valor das constantes de acoplamento de uma forma aleatória, de acordo com a seguinte lei de probabilidade:

$$\begin{cases} P(J_i = 0) = P_1 \\ P(J_i = -1) = P(J_i = 1) = (1 - P_1)/2 \end{cases}$$

Como podemos ver, P_1 vai ser probabilidade de ser escolhido o valor 0 para J_i , sendo a probabilidade de ser escolhido o valor 1 exatamente a mesma de ser escolhido o valor -1 . Por fim, atente-se que a probabilidade P_1 é igual para todas as células do sistema.

Consideremos o seguinte exemplo, escolhendo um sistema com 8×8 células, com uma configuração inicial, aleatoriamente escolhida³, cuja representação gráfica se apresenta:

²Do inglês, Threshold Cellular Automata.

³Tal como no caso dos Autómatos Celulares Periféricos no plano, também aqui vamos descrever as configurações do sistema por uma matriz.

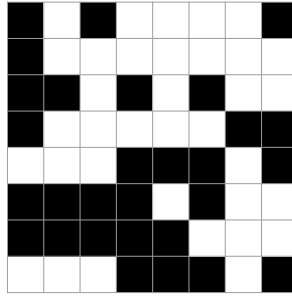


Figura 3.1: Configuração inicial de um sistema com 8×8 células.

Para cada uma das 64 células que constituem o sistema é necessário escolher as nove constantes de acoplamento J_i . Para tal, vamos considerar $P_1 = 1/3$, correspondente a uma escolha uniforme entre os diferentes valores para as constantes. Na figura seguinte, são representadas graficamente as escolhas feitas através de quadros de 3×3 valores, correspondentes às nove células que formam a vizinhança de Moore de cada célula, onde uma célula cinzenta corresponde a uma constante igual a -1 , uma célula branca a uma constante igual a 0 e uma célula preta a uma constante igual a 1.

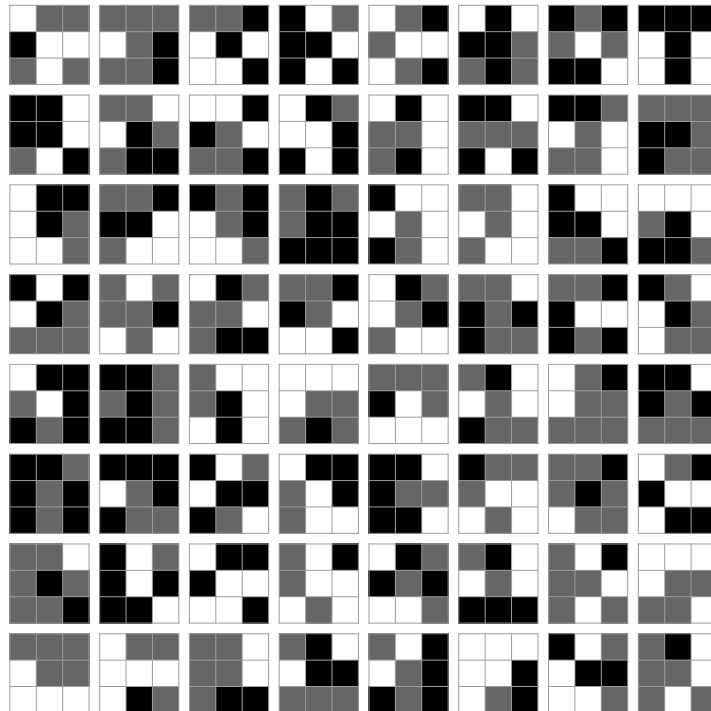


Figura 3.2: As constantes de acoplamento para cada uma das 8×8 células do sistema, onde uma célula cinzenta corresponde a uma constante igual a -1 , uma célula branca a uma constante igual a 0 e uma célula preta a uma constante igual a 1.

Como podemos observar, cada um desses quadros vai ocupar uma posição num quadro mais geral de 8×8 elementos, posição essa correspondente à célula do sistema em causa. Por

outro lado, como as constantes de acoplamento podem tomar três valores, $+1$, -1 ou 0 , distinguimos cada um deles pintando de preto, cinzento e branco, respetivamente, a posição correspondente no quadro. Por exemplo, a partir da representação gráfica acima, podemos concluir que as constantes de acoplamento relativas à célula do sistema na posição $(3, 7)$ têm os seguintes valores

$$\begin{array}{lll} J_1^{(3,7)} = 1 & J_2^{(3,7)} = 0 & J_3^{(3,7)} = 0 \\ J_8^{(3,7)} = 1 & J_0^{(3,7)} = 1 & J_4^{(3,7)} = 0 \\ J_7^{(3,7)} = -1 & J_6^{(3,7)} = -1 & J_5^{(3,7)} = 1 \end{array}$$

Escolhidos os 64 conjuntos de constantes de acoplamento, a regra de transição local (3.1) vai permitir determinar as configurações que o sistema assume, a partir da configuração inicial, nos instantes seguintes. Na figura que se segue são apresentadas as representações gráficas das configurações que o sistema assume nos primeiros 19 instantes, a partir da configuração inicial apresentada na Figura 3.1.

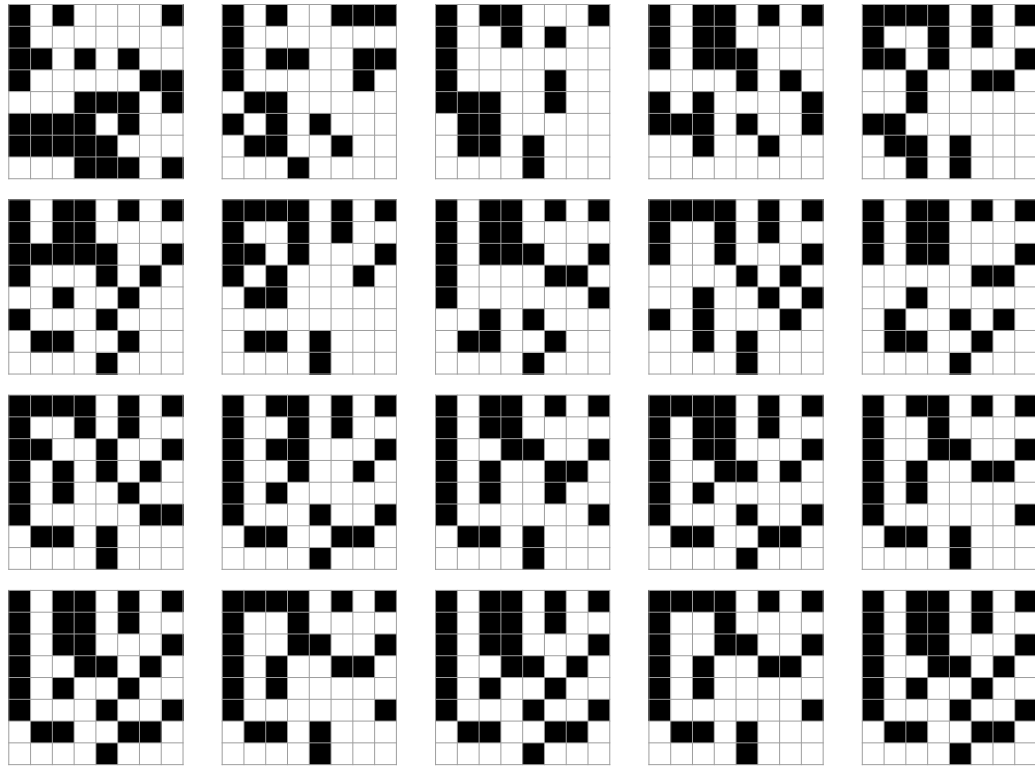


Figura 3.3: As configurações que o sistema assume nos 19 instantes seguintes, com o tempo a crescer da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Observando a dinâmica exibida pelo sistema, é perceptível que a partir do instante $T = 15$ o sistema repete um ciclo de duas configurações.

O modelo até aqui apresentado não contempla ainda uma importante generalização motivada pelos dados experimentais: muito embora as interacções privilegiem predominantemente as células vizinhas, não é impossível que células mais afastadas exerçam também alguma influência. A partir desta observação, tornou-se evidente a necessidade de generalizar o conceito de vizinhança: assim, e uma vez que a autorregulação é também um dado experimental a ter em conta, vamos, para cada $i = 1, \dots, 8$ e de uma forma sequencial, determinar se a célula i vai ser escolhida na posição i da vizinhança de Moore, ou numa qualquer outra posição do sistema fora desta vizinhança. Deste modo, vai ser possível introduzir no modelo a possibilidade de existirem acoplamentos de curta distância e acoplamentos de longa distância para as diferentes células do sistema. Por simplicidade, vamos designar por $1 - P_2$ a probabilidade de ser escolhida a posição i da vizinhança de Moore, para todo $i = 1, \dots, 8$. A escolha de uma outra qualquer posição fora da vizinhança de Moore vai ser feita por escolha aleatória, com uma distribuição de probabilidade uniforme relativamente às $n^2 - 9$ restantes células do sistema que não pertencem à vizinhança de Moore.

A ideia subjacente a este mecanismo pretende ter nos dois extremos, dois modelos conhecidos: de facto, a escolha $P_2 = 0$ determina que a regra de transição local de todas as células do sistema dependa do estado da própria célula, para traduzir o fenómeno de autorregulação, e dos seus oito vizinhos mais próximos, isto é, as nove células da vizinhança de Moore. No outro extremo, temos que $P_2 = 1$ implica que a escolha dos oito vizinhos de uma qualquer célula do sistema seja feita de forma aleatória entre todas as células do sistema que não pertencem à vizinhança de Moore, ficando assim esse modelo muito perto das redes booleanas aleatórias (RBN) introduzidas e estudadas por Stuart Kauffman⁴.

Ilustremos esta generalização com um exemplo: consideremos um sistema definido num quadrado com 6×6 células. De acordo com o nosso modelo, e escolhido um valor $P_2 = 0.2$, vamos, logo de início, explicitar as células que definem a vizinhança $viz(i, j)$ da célula que ocupa a posição (i, j) do sistema, para $i, j = 1, \dots, 6$. Para tal, vamos gerar 36 sequências aleatórias, $E(i, j)$, de 8 zeros e uns, com lei de probabilidade de Bernoulli com $p = P(X = 1) = P_2 = 0.2$, onde a obtenção de 0 vamos fazer corresponder uma escolha da célula em causa na sua posição na vizinhança de Moore, e à obtenção de 1 vamos, posteriormente, proceder à escolha de uma posição fora dessa vizinhança. Na tabela seguinte são mostradas todas as sequências $E(i, j)$ que se obtiveram por escolha aleatória.

⁴Para além da imposta autorregulação, também o universo para a escolha aleatória das oito ligações não inclui todas as células do sistema, uma vez que deixa de fora as células pertencentes à vizinhança de Moore. Como é óbvio, para valores não muito pequenos de n este último detalhe é pouco relevante.

$E(1,1)=(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$	$E(1,2)=(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$
$E(1,3)=(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$E(1,4)=(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$E(1,5)=(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$E(1,6)=(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$E(2,1)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$E(2,2)=(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
$E(2,3)=(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$E(2,4)=(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$E(2,5)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$E(2,6)=(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
$E(3,1)=(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$E(3,2)=(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$E(3,3)=(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$E(3,4)=(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$
$E(3,5)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$	$E(3,6)=(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$
$E(4,1)=(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$E(4,2)=(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$E(4,3)=(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$	$E(4,4)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
$E(4,5)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$	$E(4,6)=(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$E(5,1)=(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$	$E(5,2)=(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$E(5,3)=(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$E(5,4)=(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$E(5,5)=(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$E(5,6)=(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$
$E(6,1)=(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$E(6,2)=(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$
$E(6,3)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$	$E(6,4)=(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$E(6,5)=(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$	$E(6,6)=(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$

Tabela 3.1: Resultado das escolhas aleatórias, para cada célula do sistema de 6×6 células, com vista à determinação das células que compõem a sua vizinhança. Neste caso a saída de um 0 significa escolher a célula correspondente da vizinhança de Moore, enquanto a saída de um 1 significa que mais tarde se irá escolher uma célula do sistema não pertencente à vizinhança de Moore.

Feitas as primeiras escolhas das células da vizinhança de Moore que não vão participar na regra de transição local, devemos então proceder à escolha dessas posições fora da vizinhança de Moore. Para tal, vamos identificar nas sequências $E(i, j)$ os valores 1, isto é, os valores k para os quais se tem $E(i, j)_k = 1$, e escolher aleatoriamente, com uma lei de probabilidade uniforme, uma posição dentre aquelas que não tenham sido ainda consideradas para a célula em questão. Vamos designar essas posições por $\text{viz}(i, j)(k)$ e apresentar os resultados obtidos na seguinte tabela.

$\text{viz}_{(1,1)}(5) = (1, 3)$	$\text{viz}_{(1,1)}(6) = (3, 4)$	$\text{viz}_{(1,2)}(7) = (4, 4)$	$\text{viz}_{(1,2)}(8) = (5, 1)$
$\text{viz}_{(1,3)}(1) = (2, 5)$	$\text{viz}_{(1,3)}(8) = (3, 4)$	$\text{viz}_{(1,4)}(1) = (3, 2)$	$\text{viz}_{(1,4)}(5) = (3, 3)$
$\text{viz}_{(1,5)}(4) = (3, 2)$	$\text{viz}_{(1,6)}(2) = (3, 5)$	$\text{viz}_{(1,6)}(6) = (6, 2)$	$\text{viz}_{(2,1)}(8) = (6, 1)$
$\text{viz}_{(2,2)}(1) = (2, 4)$	$\text{viz}_{(2,2)}(2) = (1, 6)$	$\text{viz}_{(2,2)}(7) = (6, 6)$	$\text{viz}_{(2,3)}(2) = (5, 3)$
$\text{viz}_{(2,4)}(4) = (3, 2)$	$\text{viz}_{(2,6)}(3) = (4, 5)$	$\text{viz}_{(3,1)}(2) = (6, 5)$	$\text{viz}_{(3,2)}(4) = (3, 4)$
$\text{viz}_{(3,3)}(3) = (5, 2)$	$\text{viz}_{(3,4)}(1) = (5, 1)$	$\text{viz}_{(3,4)}(5) = (4, 2)$	$\text{viz}_{(3,4)}(8) = (6, 1)$
$\text{viz}_{(3,5)}(7) = (6, 2)$	$\text{viz}_{(3,6)}(2) = (5, 6)$	$\text{viz}_{(3,6)}(5) = (6, 4)$	$\text{viz}_{(3,6)}(6) = (3, 4)$
$\text{viz}_{(3,6)}(8) = (5, 4)$	$\text{viz}_{(4,1)}(5) = (6, 4)$	$\text{viz}_{(4,1)}(6) = (2, 6)$	$\text{viz}_{(4,2)}(8) = (1, 4)$
$\text{viz}_{(4,3)}(1) = (1, 2)$	$\text{viz}_{(4,3)}(8) = (1, 3)$	$\text{viz}_{(4,4)}(4) = (6, 1)$	$\text{viz}_{(4,5)}(7) = (6, 1)$
$\text{viz}_{(4,6)}(1) = (1, 2)$	$\text{viz}_{(4,6)}(5) = (4, 2)$	$\text{viz}_{(5,1)}(5) = (4, 3)$	$\text{viz}_{(5,1)}(7) = (5, 3)$
$\text{viz}_{(5,1)}(8) = (2, 2)$	$\text{viz}_{(5,2)}(4) = (4, 5)$	$\text{viz}_{(5,3)}(1) = (1, 4)$	$\text{viz}_{(5,3)}(3) = (6, 6)$
$\text{viz}_{(5,4)}(1) = (1, 4)$	$\text{viz}_{(5,5)}(2) = (4, 1)$	$\text{viz}_{(5,5)}(4) = (3, 6)$	$\text{viz}_{(5,6)}(3) = (4, 4)$
$\text{viz}_{(5,6)}(6) = (6, 4)$	$\text{viz}_{(6,1)}(2) = (4, 3)$	$\text{viz}_{(6,2)}(3) = (4, 6)$	$\text{viz}_{(6,2)}(6) = (3, 2)$
$\text{viz}_{(6,3)}(7) = (2, 5)$	$\text{viz}_{(6,3)}(8) = (2, 6)$	$\text{viz}_{(6,4)}(6) = (1, 6)$	$\text{viz}_{(6,5)}(1) = (6, 3)$
$\text{viz}_{(6,5)}(4) = (6, 1)$	$\text{viz}_{(6,5)}(5) = (4, 4)$	$\text{viz}_{(6,6)}(3) = (3, 4)$	

Tabela 3.2:

Tal como foi referido anteriormente, é a partir dos dados desta última tabela que vamos saber exatamente quais as oito células que, para cada (i, j) , vão participar, conjuntamente com a própria, na expressão (3.1). De seguida vamos escrever as 36 expressões que vão determinar

a dinâmica do sistema. Para simplificar, nas expressões abaixo não vamos explicitar a que célula (i, j) a constante de acoplamento se refere, devendo essa informação ser retirada a partir do contexto atendendo a que o primeiro termo de cada soma se refere à autorregulação, isto é, teremos sempre nessa primeira parcela o produto da constante de acoplamento J_0 pelo estado da própria célula. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(T+1) = & J_0 \sigma_{11}(T) + J_1 \sigma_{66}(T) + J_2 \sigma_{61}(T) + J_3 \sigma_{62}(T) + J_4 \sigma_{12}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{13}(T) + J_6 \sigma_{34}(T) + J_7 \sigma_{26}(T) + J_8 \sigma_{16}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}(T+1) = & J_0 \sigma_{12}(T) + J_1 \sigma_{61}(T) + J_2 \sigma_{62}(T) + J_3 \sigma_{63}(T) + J_4 \sigma_{13}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{23}(T) + J_6 \sigma_{22}(T) + J_7 \sigma_{44}(T) + J_8 \sigma_{51}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{13}(T+1) = & J_0 \sigma_{13}(T) + J_1 \sigma_{25}(T) + J_2 \sigma_{63}(T) + J_3 \sigma_{64}(T) + J_4 \sigma_{14}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{24}(T) + J_6 \sigma_{23}(T) + J_7 \sigma_{22}(T) + J_8 \sigma_{34}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{14}(T+1) = & J_0 \sigma_{14}(T) + J_1 \sigma_{32}(T) + J_2 \sigma_{64}(T) + J_3 \sigma_{65}(T) + J_4 \sigma_{15}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{55}(T) + J_6 \sigma_{24}(T) + J_7 \sigma_{23}(T) + J_8 \sigma_{13}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{15}(T+1) = & J_0 \sigma_{15}(T) + J_1 \sigma_{64}(T) + J_2 \sigma_{65}(T) + J_3 \sigma_{66}(T) + J_4 \sigma_{32}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{26}(T) + J_6 \sigma_{25}(T) + J_7 \sigma_{24}(T) + J_8 \sigma_{14}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{16}(T+1) = & J_0 \sigma_{16}(T) + J_1 \sigma_{65}(T) + J_2 \sigma_{35}(T) + J_3 \sigma_{61}(T) + J_4 \sigma_{11}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{21}(T) + J_6 \sigma_{62}(T) + J_7 \sigma_{25}(T) + J_8 \sigma_{15}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{21}(T+1) = & J_0 \sigma_{21}(T) + J_1 \sigma_{16}(T) + J_2 \sigma_{11}(T) + J_3 \sigma_{12}(T) + J_4 \sigma_{22}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{32}(T) + J_6 \sigma_{31}(T) + J_7 \sigma_{36}(T) + J_8 \sigma_{61}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}(T+1) = & J_0 \sigma_{22}(T) + J_1 \sigma_{24}(T) + J_2 \sigma_{16}(T) + J_3 \sigma_{13}(T) + J_4 \sigma_{23}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{33}(T) + J_6 \sigma_{32}(T) + J_7 \sigma_{66}(T) + J_8 \sigma_{21}(T)\end{aligned}$$

Tabela 3.3: Expressões para a regra de transição de cada uma das 6×6 células do sistema, cujas vizinhanças resultaram das escolhas descritas na Tabela 3.1 e Tabela 3.2

$$\begin{aligned}\sigma_{23}(T+1) = & J_0 \sigma_{23}(T) + J_1 \sigma_{12}(T) + J_2 \sigma_{53}(T) + J_3 \sigma_{14}(T) + J_4 \sigma_{24}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{34}(T) + J_6 \sigma_{33}(T) + J_7 \sigma_{32}(T) + J_8 \sigma_{22}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{24}(T+1) = & J_0 \sigma_{24}(T) + J_1 \sigma_{13}(T) + J_2 \sigma_{14}(T) + J_3 \sigma_{15}(T) + J_4 \sigma_{32}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{35}(T) + J_6 \sigma_{34}(T) + J_7 \sigma_{33}(T) + J_8 \sigma_{23}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{25}(T+1) = & J_0 \sigma_{25}(T) + J_1 \sigma_{14}(T) + J_2 \sigma_{15}(T) + J_3 \sigma_{16}(T) + J_4 \sigma_{26}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{36}(T) + J_6 \sigma_{35}(T) + J_7 \sigma_{34}(T) + J_8 \sigma_{24}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{26}(T+1) = & J_0 \sigma_{26}(T) + J_1 \sigma_{15}(T) + J_2 \sigma_{16}(T) + J_3 \sigma_{45}(T) + J_4 \sigma_{21}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{31}(T) + J_6 \sigma_{36}(T) + J_7 \sigma_{35}(T) + J_8 \sigma_{25}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{31}(T+1) = & J_0 \sigma_{31}(T) + J_1 \sigma_{26}(T) + J_2 \sigma_{65}(T) + J_3 \sigma_{22}(T) + J_4 \sigma_{32}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{42}(T) + J_6 \sigma_{41}(T) + J_7 \sigma_{46}(T) + J_8 \sigma_{36}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{32}(T+1) = & J_0 \sigma_{32}(T) + J_1 \sigma_{21}(T) + J_2 \sigma_{22}(T) + J_3 \sigma_{23}(T) + J_4 \sigma_{34}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{43}(T) + J_6 \sigma_{42}(T) + J_7 \sigma_{41}(T) + J_8 \sigma_{31}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33}(T+1) = & J_0 \sigma_{33}(T) + J_1 \sigma_{22}(T) + J_2 \sigma_{23}(T) + J_3 \sigma_{52}(T) + J_4 \sigma_{34}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{44}(T) + J_6 \sigma_{43}(T) + J_7 \sigma_{42}(T) + J_8 \sigma_{32}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{34}(T+1) = & J_0 \sigma_{34}(T) + J_1 \sigma_{51}(T) + J_2 \sigma_{24}(T) + J_3 \sigma_{25}(T) + J_4 \sigma_{35}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{42}(T) + J_6 \sigma_{44}(T) + J_7 \sigma_{43}(T) + J_8 \sigma_{61}(T)\end{aligned}$$

Tabela 3.4: Expressões para a regra de transição de cada uma das 6×6 células do sistema, cujas vizinhanças resultaram das escolhas descritas na Tabela 3.1 e Tabela 3.2 (continuação).

$$\begin{aligned}\sigma_{35}(T+1) = & J_0 \sigma_{35}(T) + J_1 \sigma_{24}(T) + J_2 \sigma_{25}(T) + J_3 \sigma_{26}(T) + J_4 \sigma_{36}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{46}(T) + J_6 \sigma_{45}(T) + J_7 \sigma_{62}(T) + J_8 \sigma_{34}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{36}(T+1) = & J_0 \sigma_{36}(T) + J_1 \sigma_{25}(T) + J_2 \sigma_{56}(T) + J_3 \sigma_{21}(T) + J_4 \sigma_{31}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{64}(T) + J_6 \sigma_{34}(T) + J_7 \sigma_{45}(T) + J_8 \sigma_{54}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{41}(T+1) = & J_0 \sigma_{41}(T) + J_1 \sigma_{36}(T) + J_2 \sigma_{31}(T) + J_3 \sigma_{32}(T) + J_4 \sigma_{42}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{64}(T) + J_6 \sigma_{26}(T) + J_7 \sigma_{56}(T) + J_8 \sigma_{46}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{42}(T+1) = & J_0 \sigma_{42}(T) + J_1 \sigma_{31}(T) + J_2 \sigma_{32}(T) + J_3 \sigma_{33}(T) + J_4 \sigma_{43}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{53}(T) + J_6 \sigma_{52}(T) + J_7 \sigma_{51}(T) + J_8 \sigma_{14}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{43}(T+1) = & J_0 \sigma_{43}(T) + J_1 \sigma_{12}(T) + J_2 \sigma_{33}(T) + J_3 \sigma_{34}(T) + J_4 \sigma_{44}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{54}(T) + J_6 \sigma_{53}(T) + J_7 \sigma_{52}(T) + J_8 \sigma_{13}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{44}(T+1) = & J_0 \sigma_{44}(T) + J_1 \sigma_{33}(T) + J_2 \sigma_{34}(T) + J_3 \sigma_{35}(T) + J_4 \sigma_{61}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{55}(T) + J_6 \sigma_{54}(T) + J_7 \sigma_{53}(T) + J_8 \sigma_{43}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{45}(T+1) = & J_0 \sigma_{45}(T) + J_1 \sigma_{34}(T) + J_2 \sigma_{35}(T) + J_3 \sigma_{36}(T) + J_4 \sigma_{46}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{56}(T) + J_6 \sigma_{55}(T) + J_7 \sigma_{61}(T) + J_8 \sigma_{44}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{46}(T+1) = & J_0 \sigma_{46}(T) + J_1 \sigma_{12}(T) + J_2 \sigma_{36}(T) + J_3 \sigma_{31}(T) + J_4 \sigma_{41}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{42}(T) + J_6 \sigma_{56}(T) + J_7 \sigma_{55}(T) + J_8 \sigma_{45}(T)\end{aligned}$$

Tabela 3.5: Expressões para a regra de transição de cada uma das 6×6 células do sistema, cujas vizinhanças resultaram das escolhas descritas na Tabela 3.1 e Tabela 3.2 (continuação).

$$\begin{aligned}\sigma_{51}(T+1) = & J_0 \sigma_{51}(T) + J_1 \sigma_{46}(T) + J_2 \sigma_{41}(T) + J_3 \sigma_{42}(T) + J_4 \sigma_{52}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{43}(T) + J_6 \sigma_{61}(T) + J_7 \sigma_{53}(T) + J_8 \sigma_{22}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{52}(T+1) = & J_0 \sigma_{52}(T) + J_1 \sigma_{41}(T) + J_2 \sigma_{42}(T) + J_3 \sigma_{43}(T) + J_4 \sigma_{45}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{63}(T) + J_6 \sigma_{62}(T) + J_7 \sigma_{61}(T) + J_8 \sigma_{51}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{53}(T+1) = & J_0 \sigma_{53}(T) + J_1 \sigma_{14}(T) + J_2 \sigma_{43}(T) + J_3 \sigma_{66}(T) + J_4 \sigma_{54}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{64}(T) + J_6 \sigma_{63}(T) + J_7 \sigma_{62}(T) + J_8 \sigma_{52}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{54}(T+1) = & J_0 \sigma_{54}(T) + J_1 \sigma_{14}(T) + J_2 \sigma_{44}(T) + J_3 \sigma_{45}(T) + J_4 \sigma_{55}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{65}(T) + J_6 \sigma_{64}(T) + J_7 \sigma_{63}(T) + J_8 \sigma_{53}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{55}(T+1) = & J_0 \sigma_{55}(T) + J_1 \sigma_{44}(T) + J_2 \sigma_{41}(T) + J_3 \sigma_{46}(T) + J_4 \sigma_{36}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{66}(T) + J_6 \sigma_{65}(T) + J_7 \sigma_{64}(T) + J_8 \sigma_{54}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{56}(T+1) = & J_0 \sigma_{56}(T) + J_1 \sigma_{45}(T) + J_2 \sigma_{46}(T) + J_3 \sigma_{44}(T) + J_4 \sigma_{51}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{61}(T) + J_6 \sigma_{64}(T) + J_7 \sigma_{65}(T) + J_8 \sigma_{55}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{61}(T+1) = & J_0 \sigma_{61}(T) + J_1 \sigma_{56}(T) + J_2 \sigma_{43}(T) + J_3 \sigma_{52}(T) + J_4 \sigma_{62}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{12}(T) + J_6 \sigma_{11}(T) + J_7 \sigma_{16}(T) + J_8 \sigma_{66}(T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{62}(T+1) = & J_0 \sigma_{62}(T) + J_1 \sigma_{51}(T) + J_2 \sigma_{52}(T) + J_3 \sigma_{46}(T) + J_4 \sigma_{63}(T) + \\ & + J_5 \sigma_{13}(T) + J_6 \sigma_{32}(T) + J_7 \sigma_{11}(T) + J_8 \sigma_{61}(T)\end{aligned}$$

Tabela 3.6: Expressões para a regra de transição de cada uma das 6×6 células do sistema, cujas vizinhanças resultaram das escolhas descritas na Tabela 3.1 e Tabela 3.2 (continuação).

$$\begin{aligned}
\sigma_{63}(T+1) &= J_0 \sigma_{63}(T) + J_1 \sigma_{52}(T) + J_2 \sigma_{53}(T) + J_3 \sigma_{54}(T) + J_4 \sigma_{64}(T) + \\
&\quad + J_5 \sigma_{14}(T) + J_6 \sigma_{13}(T) + J_7 \sigma_{25}(T) + J_8 \sigma_{26}(T) \\
\sigma_{64}(T+1) &= J_0 \sigma_{64}(T) + J_1 \sigma_{53}(T) + J_2 \sigma_{54}(T) + J_3 \sigma_{55}(T) + J_4 \sigma_{65}(T) + \\
&\quad + J_5 \sigma_{15}(T) + J_6 \sigma_{16}(T) + J_7 \sigma_{13}(T) + J_8 \sigma_{63}(T) \\
\sigma_{65}(T+1) &= J_0 \sigma_{65}(T) + J_1 \sigma_{63}(T) + J_2 \sigma_{55}(T) + J_3 \sigma_{56}(T) + J_4 \sigma_{61}(T) + \\
&\quad + J_5 \sigma_{44}(T) + J_6 \sigma_{15}(T) + J_7 \sigma_{14}(T) + J_8 \sigma_{64}(T) \\
\sigma_{66}(T+1) &= J_0 \sigma_{66}(T) + J_1 \sigma_{55}(T) + J_2 \sigma_{56}(T) + J_3 \sigma_{34}(T) + J_4 \sigma_{61}(T) + \\
&\quad + J_5 \sigma_{11}(T) + J_6 \sigma_{16}(T) + J_7 \sigma_{15}(T) + J_8 \sigma_{65}(T)
\end{aligned}$$

Tabela 3.7: Expressões para a regra de transição de cada uma das 6×6 células do sistema, cujas vizinhanças resultaram das escolhas descritas na Tabela 3.1 e Tabela 3.2 (continuação).

A partir deste ponto, este novo modelo, resultante da generalização da vizinhança de Moore, vai repetir os passos anteriormente descritos, ou seja, vamos escolher um valor para a probabilidade P_1 e proceder à escolha aleatória dos 36 conjuntos de 9 constantes de acoplamento $J_k^{(i,j)}$, para $k = 0, 1, \dots, 8$ e $i, j = 1, \dots, 6$, do sistema. Então, as expressões acima explicitadas determinarão a dinâmica do sistema a partir de uma configuração inicial. De seguida vamos estudar os tipos de evolução temporal identificados para estes sistemas.

3.2 A dinâmica do modelo de Sales, Martins e Stariolo

No trabalho citado, Sales, Martins e Stariolo identificam três tipos distintos de evolução temporal para o modelo de regulação genética por eles introduzido. De seguida, vamos ilustrar os três regimes com exemplos. Muito embora Sales, Martins e Stariolo caracterizem os diferentes regimes de múltiplas formas, aqui vamos dar especial atenção à variação da distância de Hamming entre as configurações que o sistema assume ao longo do tempo, partindo de configurações iniciais ligeiramente distintas.

Como ficou dito anteriormente, o modelo apresentado por Sales, Martins e Stariolo depende da escolha de valores para P_1 e P_2 . Para simplificar, todos os exemplos do modelo de Sales, Martins e Stariolo que vamos apresentar de seguida foram construídos escolhendo $P_2 = 0$, ou seja, considerando vizinhanças de Moore para todas as células do sistema.

Deste modo, serão as escolhas diferentes para P_1 que nos levará a regimes distintos para os sistemas.

Consideremos um Autômato Celular com Limiar de 20×20 células, com vizinhanças de Moore e regra de transição 3.1, onde as constantes de acoplamento foram escolhidas aleatoriamente com $P_1 = 0.05$. Escolhida uma configuração inicial, uma vez mais aleatoriamente, vamos modificar ligeiramente essa configuração, alterando o estado de uma sua célula. De seguida, fomos calcular a evolução temporal determinada pelo sistema a partir de ambas as configurações iniciais. O gráfico que se mostra apresenta a variação da distância de Hamming normalizada entre as configurações assumidas pelo sistema em cada instante, ao longo de 140 instantes de tempo.

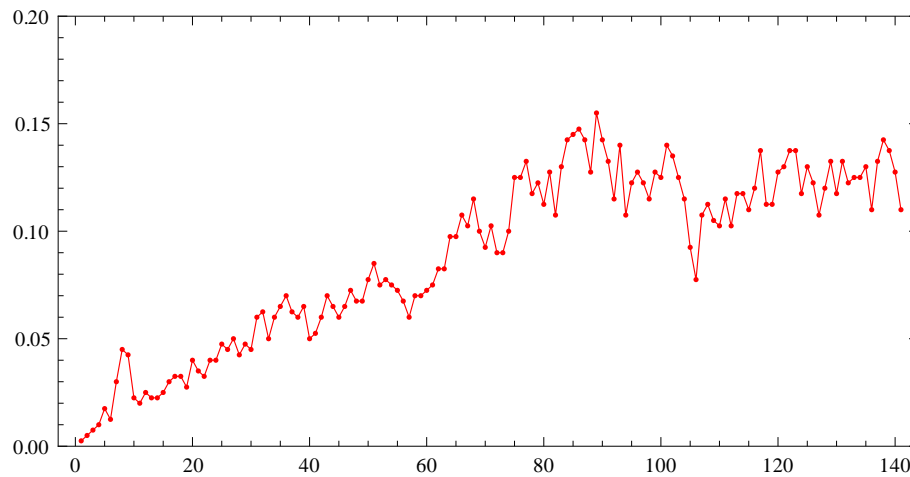


Figura 3.4: Variação da distância de Hamming normalizada entre as configurações assumidas por um sistema de 20×20 células, onde as constantes de acoplamento foram escolhidas a partir de um valor de $P_1 = 0.05$, ao longo de 140 instantes de tempo.

Uma análise deste gráfico diz-nos uma muito ligeira perturbação da configuração inicial do sistema levou a que, passados alguns instantes, o sistema assuma configurações cujas diferenças ultrapassa 10% do número total de células.

Consideremos agora um autômato em tudo idêntico ao anterior, exceto que as constantes de acoplamento foram desta vez escolhidas aleatoriamente com $P_1 = 0.7$. Então, escolhida uma configuração inicial e alterando o estado de uma sua célula, fomos calcular a evolução temporal determinada pelo sistema a partir de ambas essas configurações. O gráfico seguinte apresenta a variação da distância de Hamming normalizada entre as configurações assumidas pelo sistema em cada instante, ao longo de 40 instantes de tempo.

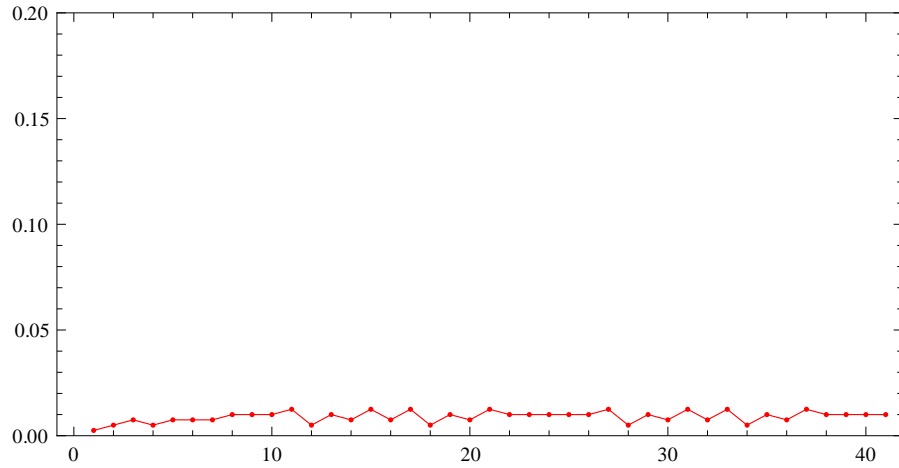


Figura 3.5: Variação da distância de Hamming normalizada entre as configurações assumidas por um sistema de 20×20 células, onde as constantes de acoplamento foram escolhidas a partir de um valor de $P_1 = 0.5$, ao longo de 40 instantes de tempo.

Este gráfico indica-nos que o sistema é praticamente indiferente a pequenas perturbações da configuração inicial, uma vez que o número de células que, em cada instante, mostra estados distintos, é claramente diminuto.

Por fim, para um sistema de características idênticas aos dois anteriores, só que com constantes de acoplamento escolhidas aleatoriamente com $P_1 = 0.5$, encontramos evoluções temporais, a partir de configurações iniciais com uma única célula com um estado diferente, relativamente às quais a distância de Hamming normalizada tem a seguinte variação.

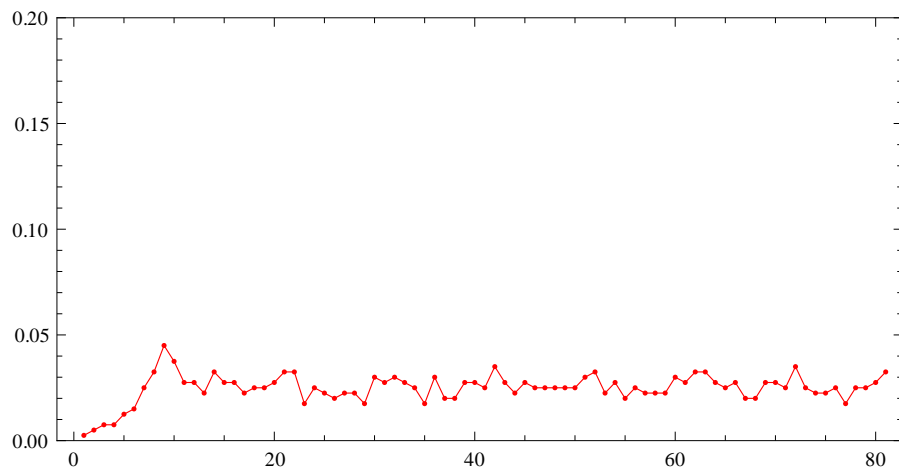


Figura 3.6: Variação da distância de Hamming normalizada entre as configurações assumidas por um sistema de 20×20 células, onde as constantes de acoplamento foram escolhidas a partir de um valor de $P_1 = 0.7$, ao longo de 80 instantes de tempo.

Comparando este gráfico com os dois anteriores, na Figura 3.4 e na Figura 3.5, é perceptível que o sistema desta vez não mostra uma capacidade para amplificar a ligeira perturbação

inicial, como no primeiro exemplo, mas também não vai conseguir esquecer e assumir configurações ao longo do tempo praticamente idênticas. Um estudo mais aprofundado permitiria concluir que, enquanto no primeiro sistema a perturbação vai ter consequências em todas as células do sistema, neste último as diferenças vão estar confinadas a células muito próximas da célula perturbada.

A partir deste estudo, Sales, Martins e Stariolo concluem que os sistemas que modelam a regulação genética podem exibir comportamentos que se podem distinguir tal como Wolfram classificou os Autómatos Celulares Elementares: ordenados, como os autómatos pertencentes à Classe II, caóticos, como os autómatos pertencentes à Classe III e marginais/complexos, como os autómatos pertencentes à Classe IV.

No capítulo seguinte vamos estudar um indicador de complexidade, ou organização, que Sales, Martins e Stariolo usam nos seus estudos, tentando perceber a sua eficácia no contexto dos Autómatos Celulares Elementares e dos Autómatos Celulares Periféricos no plano.

Capítulo 4

Uma Medida de Complexidade

Quando nos propomos estudar uma medida da complexidade de autómatos celulares, vem a propósito refletir um pouco sobre o que é a complexidade que se pretende medir, ou ainda, sobre o que é a ordem.

Perante um autómato celular, o que será razoável pensar como ordem? Seguramente por influência da Teoria dos Sistemas Dinâmicos Discretos, que na década de 1970 estava muito ativa, os primeiros estudos dos Autómatos Celulares Elementares introduziram o conceito de ordem olhando para a capacidade que os sistemas evidenciavam para atingir rapidamente uma configuração, ou um conjunto de configurações, que repetiriam indefinidamente. Estamos, parece-nos óbvio, perante uma importação dos conceitos de ponto fixo e de órbita periódica dos sistemas dinâmicos discretos, que, nesse contexto, são, de certo modo, um indicador de ordem. O problema desta associação está no seu reverso, isto é, naquilo que não é ordem: de facto, sistemas dinâmicos discretos caóticos são aqueles cujas órbitas para o futuro não se dirigem para qualquer ponto fixo ou órbita periódica. Foi nesse sentido que se percebeu que alguns sistemas dinâmicos mostravam comportamentos complexos. Ora, quando estamos a estudar autómatos celulares com um número finito de elementos, essa ideia de evolução temporal que, no futuro, nunca irá repetir qualquer configuração ou conjunto de configurações, está completamente fora de causa. A solução para esse problema veio olhando para os transientes, ou seja, identificando ordem nas dinâmicas cujos transientes sejam curtos.

Aquilo que vemos nos trabalhos que usam autómatos celulares como modelos de fenómenos ligados à Biologia é uma ideia de complexidade completamente diferente. Porque os sistemas em causa são muito complicados, estando assim completamente fora de causa encontrar os seus estados assintóticos, ou simplesmente porque ordem nesse contexto não significa que

todo o sistema repita para sempre uma configuração ou um conjunto de configurações, é aceite uma medida de complexidade que ainda questiona uma invariância, mas já não de todo o sistema e para todo o futuro, mas sim de cada um dos seus elementos e durante apenas uma janela temporal definida.

Neste capítulo vamos começar por introduzir uma medida de complexidade usada por Sales, Martins e Stariolo, para de seguida mostrar que esta medida, com as características acima apontadas, distingue de facto a reconhecida complexidade dos Autómatos Celulares Elementares. Por fim, vamos fazer o estudo da complexidade dos Autómatos Celulares Periféricos homogêneos no plano com base neste parâmetro.

4.1 Modelo de Sales, Martins e Stariolo

A partir das simulações efetuadas, Sales, Martins e Stariolo concluem que existe uma outra possível caracterização dos autómatos pertencentes a cada um dos três tipos descritos anteriormente, com a enorme vantagem de ser um parâmetro calculado a partir da evolução temporal do sistema ao longo de um número muito pequeno de instantes de tempo, evitando-se assim procuras de ciclos após longuíssimos transientes e comparações entre dinâmicas partindo de configurações ligeiramente perturbadas.

Dado um sistema e uma configuração inicial, vamos comparar o estado assumido por cada célula ao longo de um intervalo de tempo ΔT . Caso uma célula nunca altere o seu estado nesses ΔT instantes, dizemos que a célula está *congelada*. Aquilo que Sales, Martins e Stariolo perceberam foi que (1) um sistema com um grande número de células congeladas é um sistema com um comportamento ordenado; (2) um sistema com um número reduzido de células congeladas tem um comportamento caótico e (3) um sistema com um comportamento marginal apresenta um número de células congeladas entre os outros dois casos.

Voltemos aos três exemplos de sistemas de Sales, Martins e Stariolo, considerados anteriormente para ilustrar os três tipos de comportamento exibidos por estes autómatos, a partir da variação da distância de Hamming normalizada entre configurações assumidas pelos sistemas a partir de configurações iniciais ligeiramente diferentes. Para todos eles vamos escolher $\Delta T = 40$ instantes de tempo, mas apenas após um transiente de 5 instantes de tempo. Na figura seguinte mostramos as células do sistema que ficaram congeladas, representando-as de branco, ao contrário das não congeladas, representadas de cinzento.

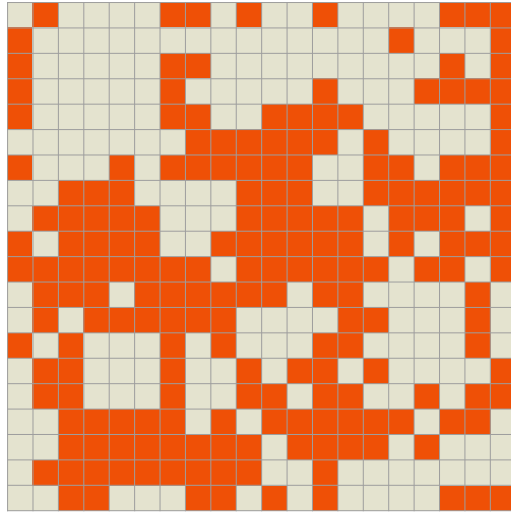


Figura 4.1: Células congeladas, representadas de branco, ao longo de 40 instantes de tempo, para o primeiro exemplo de um modelo de Sales, Martins e Stariolo anteriormente apresentado.

Do gráfico apresentado é possível perceber que 49.25% das células do sistema ficaram congeladas ao longo dos 40 instantes de tempo.

Vejamos agora o segundo dos exemplos. Em idênticas condições, foram estas as células do sistema que não alteraram o seu estado ao longo dos $\Delta T = 40$ instantes de tempo:

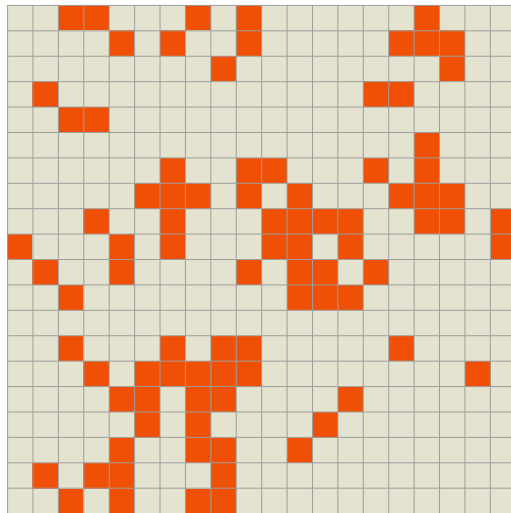


Figura 4.2: Células congeladas, representadas de branco, ao longo de 40 instantes de tempo, para o segundo exemplo de um modelo de Sales, Martins e Stariolo anteriormente apresentado.

Como se pode observar, neste caso temos que 77.50% das células do sistema permaneceram congeladas.

Por fim, vejamos o que aconteceu no terceiro exemplo, aquele autómato com um comportamento considerado mais difícil de caracterizar, exibindo uma mistura de características dos dois anteriores.

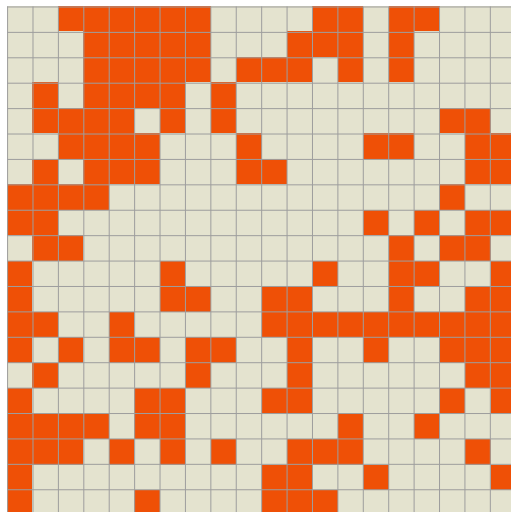


Figura 4.3: Células congeladas, representadas de branco, ao longo de 40 instantes de tempo, para o terceiro exemplo de um modelo de Sales, Martins e Stariolo anteriormente apresentado.

Pelo gráfico é possível concluir que, neste caso, 61.50% das células do sistema permaneceram congeladas.

Como podemos ver, nestes três exemplos a percentagem de células congeladas parece acompanhar de forma inequívoca o tipo de dinâmica do sistema. Apesar das óbvias desvantagens que este parâmetro tem quando nos colocamos no contexto dos Autómatos Celulares Elementares, são também muito fortes as vantagens que possui, sobretudo pelo facto de ser uma medida de complexidade ou organização do sistema a partir da evolução do estado de cada uma das suas células. Por outras palavras, tudo indica que esta percentagem de células congeladas ao longo um certo número de instantes de tempo consegue medir até que ponto o sistema, como um conjunto de elementos, se está a organizar, ou, usando a perspetiva contrária, até que ponto o sistema, como conjunto de elementos, resiste a se organizar.

De seguida vamos tentar definir este parâmetro no contexto dos Autómatos Celulares Elementares, fazendo as modificações que julgemos adequadas para que consiga acompanhar a classificação de Wolfram.

4.2 Autómatos Celulares Elementares

Consideremos uma vez mais o conjunto dos Autómatos Celulares Elementares. A questão para a qual pretendemos encontrar uma resposta é se, para estes sistemas mais simples, a medida de complexidade anterior consegue distinguir, e em que circunstâncias, a conhecida complexidade deste tipo de autómatos. Por exemplo, para afirmar ρ como uma medida de complexidade, será necessário que os valores de ρ para autómatos pertencentes a uma classe de Wolfram sejam *quase iguais*, mas *muito diferentes* relativamente a autómatos pertencentes a outra classe. Contudo, ainda antes de apresentarmos os resultados obtidos, achamos conveniente uma reflexão *a priori* relativamente ao que podemos esperar da aplicação da medida de complexidade ρ a Autómatos Celulares Elementares e das modificações necessárias para a tornar mais eficaz.

A classificação introduzida por Wolfram colocou um tipo muito preciso de autómatos numa primeira classe: aqueles sistemas cujo destino, para quase todas as escolhas iniciais, é uma configuração homogénea ou um ciclo constituído por ambas as configurações homogéneas. Os exemplos mostram que, aliada à ordem do estado final do sistema, os transientes são sempre muito curtos, mesmo para sistemas com um número razoavelmente elevado de células. Estamos assim, sem qualquer dúvida, perante autómatos com uma elevada organização, sendo então de esperar que ρ assumia valores elevados. Contudo, como facilmente se reconhece, qualquer autómato desta classe para o qual as configurações homogéneas formem um ciclo de período 2, vai ter como estado assintótico uma situação em que todas as células do sistema vão alternar os seus estados em instantes sucessivos. Sendo assim, não podemos esperar que ρ venha a reconhecer a ordem evidente que estes sistemas revelam.

Não havendo nos Autómatos Celulares Elementares regras de transição local pertencentes à Classe I de Wolfram para as quais o estado final seja um ciclo constituído por ambas as configurações homogéneas, vamos exemplificar esta situação mostrando, na figura que se segue, a evolução temporal relativas a regras de transição local pertencentes à Classe II de Wolfram, regra 1 e regra 7, a partir de configurações iniciais pertencentes à bacia de atração desse ciclo homogéneo.

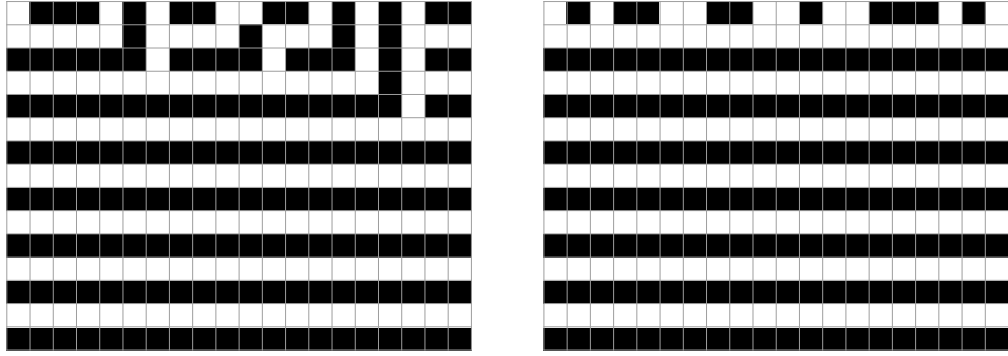


Figura 4.4: Diagramas espaço-temporais relativos às regras 1 e 7, à esquerda e à direita, respetivamente, a partir de configurações iniciais pertencentes à bacia de atração do ciclo periódico constituído por ambas as configurações homogêneas.

Como podemos ver, apesar da ordem evidente das dinâmicas, vamos ter, em ambos os casos, valores para ρ iguais a zero. Para corrigir esta situação, vamos modificar um pouco a definição de ρ descrita por Sales, Martins e Stariolo.

Definição 4.1. *Dado um autómato celular finito, com N elementos, seja*

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_k(\Delta T),$$

onde $\delta_k(\Delta T) = 1$ se a célula k mantiver invariante o seu estado, ou mostrar uma alternância de estados, durante um intervalo de ΔT instantes de tempo. Caso contrário, teremos $\delta_k(\Delta T) = 0$.

Esta modificação relativamente à definição anterior vem apenas acrescentar duas sucessões de estados, a alternância entre estados iniciada por zero e a alternância entre estados iniciada por um, às duas sucessões constantes, como identificadoras de ordem. Por outro lado, para valores não muito pequenos da janela temporal ΔT , esta concessão não implica um grande acréscimo para os valores de ρ no caso dos autómatos celulares pertencentes à Classe III de Wolfram, aqueles cuja evolução temporal revela uma enorme desorganização ou complexidade, para os quais é desejável que ρ tenha valores próximos de zero.

Tendo como propósito a identificação de ordem na evolução temporal de cada uma das células do sistema, parece-nos evidente que, se o valor de ρ for determinado após alguns instantes, os valores de ρ serão iguais a 1 em casos em que a ordem da evolução temporal é evidente. Não se trata aqui de pretender calcular ρ quando tivermos a garantia que o sistema se encontra já no seu estado assintótico, mas apenas assegurar que a regras de

transição local onde é evidente a ordem dos seus diagramas espaço-temporais, quer pelo estado assintótico, quer pelos transientes extremamente curtos, corresponde um valor para ρ muito próximo de 1. Na figura seguinte temos dois diagramas espaço-temporais, relativos às regras 0 e 168, onde podemos perceber a diferença para os valores de ρ quando calculamos logo a partir da configuração inicial ou após 4 instantes de tempo.

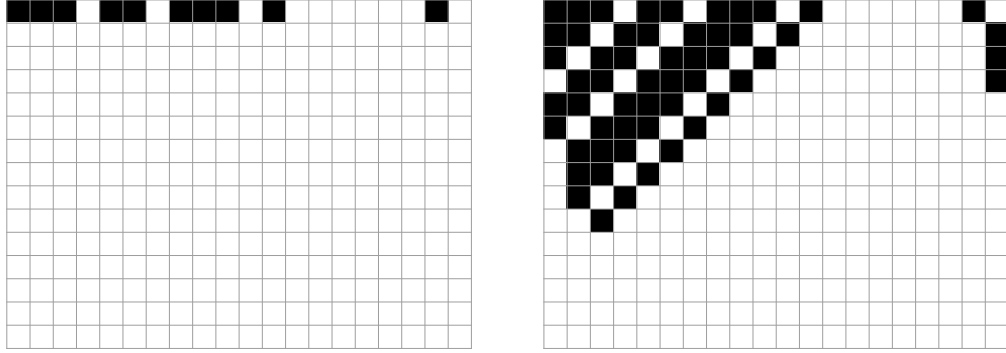


Figura 4.5: Diagramas espaço-temporais relativos às regras 0 e 168, à esquerda e à direita, respetivamente. Neste caso é evidente que o cálculo de $\rho(\Delta T)$, com $\Delta T = 10$, apenas após 4 instantes de tempo tem uma maior capacidade para captar a ordem das dinâmicas.

Como podemos perceber, caso o cálculo de ρ fosse feito logo a partir da configuração inicial, teríamos os valores $\rho_0(10) = 10/20$ e $\rho_{168}(10) = 6/20$. Contudo, esperando 4 instantes de tempo, esses valores, $\rho_0(10) = 20/20$ e $\rho_{168}(10) = 12/20$, tornam mais explícita a ordem das dinâmicas. Veja-se que se a escolha para o transiente fosse, por exemplo, igual a 10 instantes de tempo, imediatamente teríamos a igualdade de ambos os valores de ρ , o que também não seria interessante, pois é possível identificar alguma diferença entre as dinâmicas relativamente à sua organização.

O estudo efetuado consistiu na simulação de autómatos com $N = 3\,000$ células, a partir de configurações iniciais aleatoriamente escolhidas. Nas tabelas seguintes são apresentados os valores médios $\bar{\rho}$ relativamente a 2\,000 simulações realizadas para cada regra. É também importante referir duas escolhas: primeiro, que em todos os cálculos de ρ foi considerada uma janela temporal $\Delta T = 24$ instantes de tempo; segundo, que a avaliação do estado de cada célula ao longo de ΔT instantes de tempo foi iniciada após um transiente de 100 instantes de tempo.

Para os Autómatos Celulares Elementares pertencentes à Classe I de Wolfram, estes foram os valores médios para ρ :

regra	0	8	32	40	128	136	160	168
$\bar{\rho}$ (%)	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Tabela 4.1: Valores médios de ρ , para os Autómatos Celulares Elementares pertencentes à primeira classe de Wolfram, relativamente a 2 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas.

Como podemos observar, os valores tabelados para $\bar{\rho}$ evidenciam o carácter extremamente ordenado da evolução temporal das regras homogêneas. Vejamos agora o que acontece com os autómatos pertencentes à Classe II de Wolfram.

Os autómatos celulares classificados na Classe II de Wolfram têm estados assintóticos periódicos, de períodos não muito elevados, alcançados após curtos transientes. No entanto, pertencem a esta classe autómatos em que o referido estado assintótico está relacionado com o deslocamento de configurações, para a esquerda ou para a direita, sendo assim o seu carácter periódico uma consequência direta das condições de fronteira: estamos perante estados assintóticos periódicos de período igual a N , um múltiplo de N , ou ainda, um divisor de N , caso a configuração que se desloca tenha alguma simetria. Ora, como facilmente se reconhece, o diagrama espaço-tempo correspondente a um destes estados assintóticos mostra que dificilmente a medida ρ vai assumir um valor correspondente a uma evolução temporal organizada.

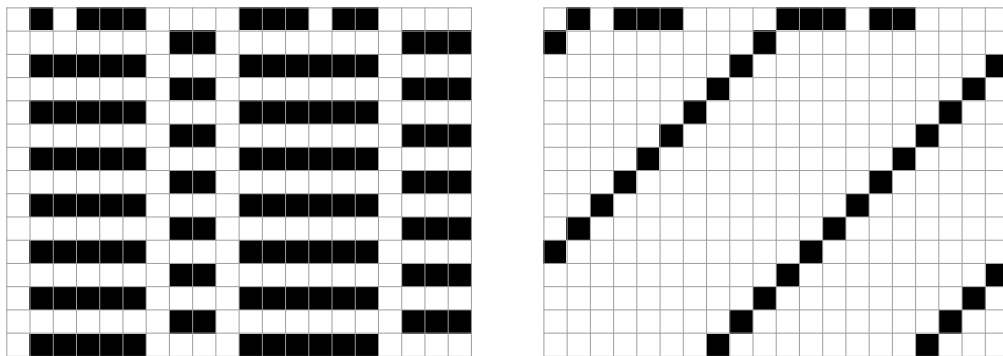


Figura 4.6: Diagramas espaço-temporais relativos às regras 1 e 2, à esquerda e à direita, respetivamente. Pertencendo ambas à Classe II de Wolfram, é notório que os valores de ρ que vamos encontrar são muito distintos: $\rho_1(10) = 20/20$ e $\rho_2(10) = 1/20$, onde ambos os valores foram calculados após 4 instantes de tempo.

Assim sendo, facilmente se reconhece que estas regras de transição, pelas suas características muito peculiares, vão estar fora do alcance da medida de complexidade ρ . Por isso, decidimos que, nesta avaliação da capacidade da medida ρ para aperceber a complexidade da evolução temporal, é necessário não considerar nenhum Autómato Celular Elementar pertencente à Classe II de Wolfram cujo estado assintótico, para quase toda a escolha da configuração inicial, esteja relacionado com o deslocamento de configurações¹. Feita esta correcção, apresentam-se na tabela seguinte os valores de $\bar{\rho}$ para todas as outras regras de transição local pertencentes à Classe II de Wolfram:

<i>regra</i>	$\bar{\rho}$ (%)	<i>regra</i>	$\bar{\rho}$ (%)	<i>regra</i>	$\bar{\rho}$ (%)
1	100.0	37	100.0	108	100.0
4	100.0	44	100.0	132	100.0
5	100.0	50	100.0	140	100.0
12	100.0	51	100.0	156	100.0
13	100.0	57	78.57	164	100.0
19	100.0	72	100.0	172	100.0
23	100.0	76	100.0	178	100.0
28	100.0	77	100.0	184	71.41
29	100.0	78	100.0	200	100.0
33	100.0	94	95.28	204	100.0
36	100.0	104	100.0	232	100.0

Tabela 4.2: Valores médios de ρ , para alguns dos Autómatos Celulares Elementares pertencentes à segunda classe de Wolfram, relativamente a 2000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas.

Observando os valores obtidos para $\bar{\rho}$, verificamos que, mais uma vez, a medida ρ parece captar com grande eficácia a organização da evolução temporal deste tipo de sistema.

¹É importante referir também que a identificação destas regras de transição, mesmo para outras famílias de autómatos celulares, não é muito complicada.

De seguida, fomos estudar os autómatos pertencentes à Classe III de Wolfram, aqueles cuja evolução temporal evidencia uma óbvia inexistência de qualquer padrão. Os valores obtidos para ρ levaram aos seguintes resultados:

regra	18	22	30	45	60	73	90
$\bar{\rho}$ (%)	0.0214	0.0153	0.0000	0.0000	0.0000	62.21	0.0000

regra	105	106	122	126	146	150
$\bar{\rho}$ (%)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0225	0.0000

Tabela 4.3: Valores médios de ρ , para os Autómatos Celulares Elementares pertencentes à terceira classe de Wolfram, relativamente a 2 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas.

Com uma única exceção, os valores encontrados para $\bar{\rho}$ vão ao encontro daquilo que era esperado: a desorganização da evolução temporal do sistema conduz inevitavelmente a valores próximos de zero para ρ . A exceção referida é a regra de transição local 73, cujo valor encontrado para $\bar{\rho}$ revela, ainda assim, um comportamento das células do sistema muito diferente dos sistemas ordenados das Classes I e II de Wolfram.

Por fim, estudámos os valores de ρ para as duas regras de transição local identificadas como pertencentes a uma Classe IV de Wolfram, atendendo às características *entre a ordem e a desordem* da evolução temporal dos sistemas. Os resultados obtidos foram os seguintes:

regra	54	110
$\bar{\rho}$ (%)	7.557	0.5079

Tabela 4.4: Valores médios de ρ , para os Autómatos Celulares Elementares pertencentes à quarta classe de Wolfram, relativamente a 2 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas.

Este é um ponto fundamental para o nosso estudo: se os valores de ρ obtidos para autómatos celulares pertencentes à Classe IV de Wolfram se distinguem dos valores anteriores, em particular dos encontrados para os autómatos celulares pertencentes à Classe III de Wolfram. A tabela anterior mostra-nos que assim é, de facto: $\bar{\rho}_{110}$ é muito diferente e mesmo $\bar{\rho}_{54}$ é vinte vezes superior que o maior valor encontrado para os autómatos celulares pertencentes à Classe III de Wolfram, excetuando, claro está, a regra de transição local 73.

Concluindo, os resultados encontrados levam-nos a aceitar o parâmetro ρ como uma medida da complexidade, ou da organização, da evolução temporal de Autómatos Celulares Elementares. Sendo assim, é legítimo procurar saber como se comporta esta medida quando aplicada a outros autómatos, por exemplo, aos Autómatos Celulares Periféricos no plano.

4.3 Autómatos Celulares Periféricos no plano

Verificada a capacidade da medida ρ para distinguir a organização das dinâmicas exibidas pelos mais simples autómatos celulares, será interessante perceber qual a sua eficácia perante a família dos Autómatos Celulares Periféricos no plano. Nesse sentido, fomos estudar os valores de ρ para as regras de transição local deste tipo identificadas como pertencentes à Classe I de Wolfram, apresentadas na Tabela 2.1 e na Tabela 2.2.

No trabalho apresentado por J.A. Freitas, [Freitas, 2012], é sugerido que, ao contrário do que acontece com os Autómatos Celulares Elementares, as dinâmicas exibidas pelos Autómatos Celulares Periféricos no plano pertencentes à Classe I de Wolfram são tudo menos triviais. De facto, neste caso vamos ter regras de transição local que revelam formas algo complicadas no caminho para os estados finais homogêneos. É nesse sentido que se torna interessante saber até que ponto a medida ρ consegue assumir um papel diferenciador das diferentes ordens de organização mostradas por estas dinâmicas. Assim sendo, fomos estudar sistemas quadrados, de 48×48 células, a partir de 10 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas, considerando janelas temporais de $\Delta T = 26$ instantes de tempo, consideradas após 10 instantes de tempo. Recordando que uma das conclusões dos estudos apresentados em [Freitas, 2012] relativas aos Autómatos Celulares Periféricos no plano pertencentes à Classe I de Wolfram é o crescimento lento da bacia de atração \mathcal{B}_h para algumas dessas regras de transição local, modificámos o programa que calcula ρ de modo a que estivesse sempre garantido que o valor obtido correspondesse de facto a uma dinâmica em \mathcal{B}_h . Desse modo, os valores que estamos a comparar serão sempre referentes à estrutura da bacia de atração mais importante para os autómatos em causa. Os resultados obtidos são apresentados na seguinte tabela.

regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)
0	100.0000	127	1.6319	479	15.6660
3	90.2897	128	100.0000	552	99.9767
7	81.3032	136	99.9999	576	100.0000
8	99.9999	168	99.9999	579	19.9149
23	66.2114	192	99.9999	583	20.7895
25	64.0227	200	99.9343	584	99.9442
27	55.1902	232	99.4184	599	32.5240
31	33.7199	287	47.5273	603	7.7086
40	99.9999	297	45.0260	607	6.1978
63	4.9733	303	22.6292	616	99.7518
64	100.0000	317	43.7104	640	100.0000
67	72.2572	319	32.1988	648	99.9763
69	63.7888	327	39.9946	680	99.7857
71	52.3368	329	48.3833	704	100.0000
72	99.9973	333	18.4964	712	99.3971
87	61.3954	335	9.0999	744	96.3815
89	24.1613	351	31.8738	815	13.6545
91	26.6855	367	3.6915	829	28.2105
95	23.0393	415	14.3041	863	30.2037
104	99.9791	447	2.0044	879	7.3854

Tabela 4.5: Valores médios de $\rho_{\text{regra}}(\Delta T)$, para $\Delta T = 24$ instantes de tempo, relativos a sistemas com 48×48 células e consideradas 10 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas.

regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)
927	4.2683	1 640	98.5854	2 760	78.8295
991	7.4669	1 664	99.9990	2 784	98.6473
1 056	100.0000	1 672	99.9352	2 792	39.7375
1 063	37.3216	1 696	99.9978	3 232	99.9999
1 064	99.9993	1 704	99.7353	3 240	99.9630
1 120	99.9988	1 728	99.9537	3 296	99.5749
1 127	25.8852	1 736	98.0882	3 304	75.9868
1 128	99.9419	1 760	98.3995	3 808	88.6530
1 152	100.0000	1 768	83.4987	3 816	3.3032
1 160	99.9997	2 176	100.0000	5 248	99.9999
1 184	99.9999	2 184	99.9911	5 256	99.9976
1 192	99.9994	2 208	99.9999	5 312	99.9448
1 216	99.9864	2 216	99.9820	5 320	98.4588
1 224	99.6587	2 240	99.9999	5 760	99.9899
1 248	99.7829	2 248	98.0135	5 768	99.8984
1 256	95.5941	2 272	99.8693	5 824	99.6754
1 339	42.6135	2 280	92.4946	5 832	89.5676
1 403	38.5823	2 720	99.9137	6 272	99.9999
1 632	99.8967	2 728	94.0781	6 280	99.9871
1 639	24.1554	2 752	100.0000	6 304	99.9997

Tabela 4.6: Valores médios de $\rho_{\text{regra}}(\Delta T)$, para $\Delta T = 24$ instantes de tempo, relativos a sistemas com 48×48 células e consideradas 10 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas (continuação).

regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)
6 312	99.8784	10 368	100.0000	11 336	99.9012
6 336	99.9706	10 376	99.9465	11 360	99.9761
6 344	96.0583	10 408	97.9337	11 368	98.9385
6 368	99.2387	10 432	99.9996	11 392	99.9996
6 376	72.4660	10 440	96.6655	11 400	99.9275
6 816	99.8342	10 472	60.5637	11 424	99.9823
6 824	86.2862	10 752	99.9964	11 432	97.9135
6 848	99.8818	10 760	99.5289	11 456	99.9492
6 856	51.9744	10 792	94.1751	11 464	93.4147
6 880	96.5713	10 816	99.9986	11 488	93.2573
6 888	7.1742	10 824	97.9298	11 496	36.5273
7 328	99.9978	10 856	79.0273	11 784	97.8298
7 392	97.0304	10 880	99.9935	11 808	96.4319
7 904	57.9905	10 888	94.7289	11 816	77.1998
1 0240	100.0000	10 920	61.1694	11 848	91.5413
1 0248	99.9993	10 944	99.9984	11 872	81.5710
1 0280	99.9156	10 952	67.3162	11 880	39.4576
1 0304	100.0000	11 272	99.9949	11 904	98.8908
1 0312	99.9842	11 296	99.9999	11 912	86.6927
1 0344	99.5978	11 304	99.7698	11 936	82.9347

Tabela 4.7: Valores médios de $\rho_{\text{regra}}(\Delta T)$, para $\Delta T = 24$ instantes de tempo, relativos a sistemas com 48×48 células e consideradas 10 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas (continuação).

regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)
11 944	30.6477	27 368	4.4173	33 352	99.8578
11 968	97.2752	27 808	99.8660	33 384	99.5146
11 976	33.2534	27 816	93.1301	33 408	100.0000
12 000	20.8201	27 872	57.5371	33 416	99.9125
15 488	99.9567	27 880	5.5113	33 448	98.9771
15 496	99.2722	28 384	1.3553	33 472	99.9999
15 552	99.5982	32 768	100.0000	33 480	97.6778
15 560	71.2641	32 776	99.9999	33 512	90.5271
16 000	87.2755	32 808	100.0000	33 824	99.9999
16 008	99.9995	32 832	100.0000	33 832	99.9996
16 064	74.6626	32 840	99.9921	33 888	99.9991
26 752	100.0000	32 872	99.9676	33 896	99.9263
26 760	99.9572	32 896	100.0000	33 920	100.0000
26 792	99.4316	32 904	99.9998	33 928	99.9991
26 816	99.9950	32 936	99.9998	33 952	99.9999
26 824	93.5928	32 960	99.9973	33 960	99.9987
26 856	61.6378	32 968	99.7673	33 984	99.9170
27 304	59.0882	33 000	98.5751	33 992	98.6584
27 328	99.9954	33 320	99.9454	34 016	99.4378
27 336	66.1067	33 344	100.0000	34 024	92.3941

Tabela 4.8: Valores médios de $\rho_{\text{regra}}(\Delta T)$, para $\Delta T = 24$ instantes de tempo, relativos a sistemas com 48×48 células e consideradas 10 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas (continuação).

regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)
34 400	99.8749	35 520	99.9995	39 080	99.4033
34 408	97.9684	35 528	54.4681	39 104	99.9231
34 432	99.9983	35 552	93.1473	39 112	88.8699
34 440	99.8645	35 560	13.5038	39 136	98.3435
34 464	99.9967	36 000	99.9998	39 144	53.6886
34 472	99.4327	36 008	99.2747	39 584	99.3878
34 496	99.7854	36 064	98.7354	39 592	65.6761
34 504	95.0623	36 072	46.1422	39 616	99.5143
34 528	95.5059	36 576	60.6082	39 624	24.3235
34 536	72.0387	38 016	99.9999	39 648	86.7351
34 944	100.0000	38 024	99.9963	40 096	99.9918
34 952	99.9005	38 080	99.8015	40 160	91.5091
34 976	99.9997	38 088	96.0206	40 672	10.9430
34 984	99.8298	38 528	99.9772	43 008	99.9998
35 008	99.9981	38 536	99.7814	43 016	99.9613
35 016	93.8968	38 592	99.1893	43 048	98.6360
35 040	99.6918	38 600	74.0068	43 072	99.9998
35 048	82.8840	39 040	99.9999	43 080	99.8718
35 488	99.4620	39 048	99.8190	43 112	96.4019
35 496	80.7628	39 072	99.9978	43 136	99.9995

Tabela 4.9: Valores médios de $\rho_{\text{regra}}(\Delta T)$, para $\Delta T = 24$ instantes de tempo, relativos a sistemas com 48×48 células e consideradas 10 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas (continuação).

regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)	regra	$\bar{\rho}$ (%)
43 144	98.5818	44 128	99.4334	44 744	8.4536
43 176	80.8780	44 136	87.3128	44 768	7.6495
43 200	99.9955	44 160	99.9173	48 256	97.9951
43 208	83.6525	44 168	96.7310	48 264	82.8867
43 520	99.9267	44 192	97.2341	48 320	84.7424
43 528	97.6504	44 200	62.4045	48 328	16.0861
43 560	80.6618	44 224	99.0989	48 768	72.6535
43 584	99.9239	44 232	64.8397	48 776	39.0370
43 592	90.5658	44 256	67.6596	48 832	20.8270
43 624	42.6298	44 552	93.4797	59 520	99.9589
43 648	99.8643	44 576	88.8157	59 528	89.9134
43 656	80.3108	44 584	58.4657	59 560	53.6869
43 688	30.2722	44 616	74.3234	59 584	99.0744
43 712	99.7994	44 640	53.0750	59 592	47.3241
43 720	22.9192	44 672	95.9061	60 096	95.2956
44 040	99.8399	44 680	66.8140	60 104	15.6455
44 064	99.8718	44 704	62.0691	60 576	67.7587
44 072	96.4423	44 712	12.5993	60 640	23.0929
44 104	98.9350	44 736	81.7321		

Tabela 4.10: Valores médios de $\rho_{\text{regra}}(\Delta T)$, para $\Delta T = 24$ instantes de tempo, relativos a sistemas com 48×48 células e consideradas 10 000 configurações iniciais aleatoriamente escolhidas (continuação).

Observando os valores de ρ tabelados, é visível que para a grande maioria das regras de transição o valor de ρ está muito perto dos 100%. Esse facto poderia ser antecipado, sabendo nós que todos os Autómatos Celulares Elementares pertencentes à Classe I de Wolfram mostraram exatamente esse valor². Por outras palavras, seria de esperar que muitos dos Autómatos Celulares Periféricos no plano homogéneos mostrassem uma organização semelhante à dos mais simples autómatos unidimensionais. A nossa curiosidade centrava-se mais na capacidade desta medida em distinguir estes sistemas, ou seja, se os valores calculados iriam, ou não, mostrar grandes diferenças para esta família muito específica de autómatos. Como podemos ver, existem de facto regras de transição com valores muito

²Muito embora com escolhas diferentes para o sistema, para ΔT e para os transientes.

dísparos para ρ : por exemplo, a regra de transição $N(\phi) = 63$ mostra valores baixíssimos para ρ , aproximadamente 5%. Não sendo a única, também não são muitas aquelas que revelam tal resistência à organização das suas configurações ao longo do tempo. É também uma das conclusões das tabelas anteriores que os valores de ρ de certa forma se distribuem por todas as ordens de grandeza possíveis, mostrando assim que, perante este numeroso conjunto de regras de transição homogêneas, algo que não sucede com os autómatos mais simples, é evidente a existência de uma grande diversidade de dinâmicas, apesar de todas elas terem como estado assintótico comum algo muito simples.

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho permite-nos concluir que a medida ρ introduzida pode ser um bom candidato a medir a complexidade, ou a organização, de Autómatos Celulares Periféricos no plano. Aquilo que pensamos ter ficado patente nos resultados apresentados, é a sua particular capacidade para medir as diferenças nas dinâmicas dos mais simples destes autómatos: aqueles que têm como estado assintótico um ponto fixo que é uma configuração homogénea, ou um ciclo composto por ambas as configurações homogéneas.

Os autómatos classificados na primeira das classes de Wolfram foram sempre olhados como aqueles cujas dinâmicas eram as mais desinteressantes: tendo como destino uma configuração, ou um par de configurações extremamente simples, como poderia ser de outra forma? A partir do trabalho apresentado por J. Freitas, ficou a suspeita que no contexto bidimensional as coisas talvez não tivessem que ser necessariamente assim tão simples. É nesse sentido que o estudo dos Autómatos Celulares Periféricos no plano homogéneos utilizando uma medida de complexidade, ou de organização, surge como deveras importante. Estamos ainda num contexto muito simples, mas o ideal para entendermos muitas das questões mais complicadas. Neste caso a simplicidade evidente é uma valiosa ajuda para a procura de respostas, uma vez que, dada uma qualquer destas regras de transição, é conhecido o estado assintótico do sistema. Estamos, assim, a estudar a dinâmica ainda na sua fase transiente, isto é, ao longo dos instantes que nos leva da configuração inicial ao estado assintótico homogéneo. Por outro lado, parece-nos evidente que uma análise da dinâmica ao longo desses instantes de tempo só terá sentido se for feita para cada célula do sistema, uma vez que, por definição, a totalidade do sistema ainda não encontrou o seu estado de equilíbrio.

Como é óbvio, este trabalho não apresenta respostas definitivas, mas apenas aponta caminhos que, na nossa opinião, baseada nos resultados aqui mostrados, podem ser muito interessantes. Pensamos assim que é necessário continuar a estudar estes autómatos para entender exatamente o que este parâmetro ρ está a medir, para saber se é necessário ajustes aos parâmetros que fixam ρ e, também, se terá sentido estudar a variação de ρ ao longo do tempo.

Bibliografia

- [Cook, 2004] M. Cook, "Universality in Elementary Cellular Automata", *Complex Systems*, **15** (2004) 1-40.
- [Freitas, 2012] J.A. Freitas, "Modelos de Evolução Temporal", *Tese de Mestrado*, Universidade do Minho, 2012.
- [Manna & Stauffer, 1990] S.S. Manna & D. Stauffer, "Systematics of Transitions of Square-Lattice Cellular Automata", *Physica A*, **162** (1990) 176-186.
- [Packard & Wolfram, 1985] N. Packard e S. Wolfram, "Two-dimensional Cellular Automata", *Journal of Statistical Physics*, **38** (1985) 901-946.
- [Sales, Martins & Stariolo, 1997] J.A. de Sales, M.L. Martins e D.A. Stariolo, "Cellular Automata Model for Gene Networks", *Physical Review E*, **55** (1997) 3262-3270.
- [Silva, 2003] H.S. Silva, "Um Modelo de Autômatos Celulares para a Diferenciação Celular", *Tese de Mestrado*, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, Brasil, 2003.
- [Stauffer, 1989] D. Stauffer, "Classification of Square Lattice Cellular Automata", *Physica A*, **157** (1989) 645-655.
- [Wolfram, 1984a] S. Wolfram, "Computation Theory of Cellular Automata", *Commun. Math. Phys.*, **96** (1984) 15-57.
- [Wolfram, 1984b] S. Wolfram, "Universality and Complexity in Cellular Automata", *Physica D*, **10** (1984) 1-35.
- [Wuensche, 1992] A. Wuensche e M. Lesser, "The Global Dynamics of Cellular Automata", Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Addison-Wesley, 1992.

Na elaboração deste trabalho foram consultados os seguintes sítios da *Internet*:

www.diale.org/ca-1d.html

fisica.ufpr.br/viana/artigos/accepted/Artigo-revisado.pdf

www.samuelvanransbeeck.be/downloads/files/TesedeMestrado.pdf

www.modelab.ufes.br/automato/frames.html

www.ic.uff.br/PosGraduacao/Dissertacoes/361.pdf

progcmasmais.blogspot.com/2011/01/codigo-em-c-automatos-celulares.html

www.ppgee.ufmg.br/defesas/113M.PDF

sare.unianhanguera.edu.br/index.php/rcect/article/view/412/408

www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/12079/000622964.pdf?sequence=1